تحریر اُقلیدس

پہلا اور دوسرا مقالہ

معہ شرح و ۲۷۵ سوالات

جسکو

حسب منشاء جناب فیضماب ایم کیمپسن صاحب بہادر ایم اے ڈیرکٹر سابق سررشتہ تعلیم ممالک مغربی و شمالی و اودھ

بابو آتمارام بی اے ہیڈماسٹر گورنمنٹ ہائی اسکول متھرا

نے

بغرض فائدہ طلباء نارمل اسکول و مدارس تحصیلی و حلقہ بندی کے

عمدہ عمدہ انگریزی کتابوں سے

تالیف کیا

در مطبع پریس واقع سامی گھاٹ باہتمام منشی رام نراین طبع گردید

سنہ ۱۸۸۲ء

تیسری بار ۳۵۰۰ جلد — قیمت فی جلد ۱۰ — محصول ڈاک ۱

PREFACE.

In thus presenting to students and teachers a new elementary work in Urdu on the Principles of Geometry, it can hardly be necessary to defend the having made Euclid's Elements the basis of the work. For while it cannot be denied that many defects and difficulties occur in the Elements, and that these become more obvious the more closely we examine the work, it must, on the other hand, be acknowledged that notwithstanding the numerous attempts which have been made by our best modern geometers to find an appropriate substitute, the "Elements" of Euclid has ever held the chief place in our Universities and Colleges, and is never likely to be superseded. Nearly every official programme of instruction or examination expressly includes some portion of this time-honoured work.

The present edition of Euclid's Elements is prepared especially for those studying for the Normal School Certificate and the Middle Class Vernacular Examinations in the North-Western Provinces and Oudh. It differs in several important particulars from other editions of the same work intended to be used as text books in the Vernacular schools of India. *First*, the style has been simplified as far as possible by discarding much of the usual technical phraseology, and in places where this has been necessarily retained, copious explanations have been added, especially in the Definitions. A list of all the technical terms used in the work together with their English and Hindi equivalents is also attached. *Secondly* many new and simpler Demonstrations of the Propositions have been given, *in addition* to those of Euclid, in order to bring the subject within the comprehension of different capacities. In not a few cases where Euclid has given, only the indirect method of proof or what is called *Reductio ad absurdum* (-the method generally employed by Euclid for the demonstration of converse propositions)— a direct method of proof which is more satisfying and more convincing to the student has been appended. *Thirdly* to almost all the propositions, there have been added new Corollaries, Exercises and Annotations of various kinds, tending to render the additions a species of short running commentary on the immortal work of Euclid. *Fourthly*, in order to remove one of the most practical objections which have been urged against the Elements, namely, its want of methodical arrangement, a classified index has been appended by means of which all the propositions in the Elements relating to any particular subject may be immediately found.

In conclusion I must not omit to mention the principal works which have been consulted, and to which the present edition is mainly indebted for any advantages which it may possess over its rivals in the same field, The works referred to are the editions of the Elements by Todhunter, Potts, Wallace, Playfair, Smith and Law.

It only remains for me to offer my thanks to the friends who have helped me with their advice in th preparation of this work, and to assure each student and teacher that any suggestion for its improvement will be thankfully received by me.

Muttra.
January, 1882.

A. R.

اصطلاح

انگريزي	هندي	اردو
Definitions	परिभाषा	حدود
Dimension	विस्तार	امتداد
Point	विन्दु	نقطه
Locus	निधि	مقام النقاط
Line	रेखा	خط
Straight line	सीधी या सरल रेखा	خط مستقيم
Parallel straight lines	समानान्तर सीधी रेखा	خطوط مستقيم متوازيه
Curve	वक्र या कुटिल रेखा	خط منحني
Superficies	धरातल	سطح
Plane superficies	दर्पणोदर धरातल	سطح مستوي
Solid	पिंड	جسم
Plane angle	कोण	زاويه مسطحه
Plane rectilineal angle	सरल कोण	زاويه مسطحه مستقيم الخطين
Right angle	समकोण	زاويه قائمه
Obtuse angle	अधिक कोण	زاويه منفرجه
Acute angle	न्यूनकोण	زاويه حاده
Re-entering angle	पुनर्युक्तकोण	زاويه مكرره
Adjacent angle	आसन्नकोण	زاويه متصله
Interior angle	अन्त:कोण	زاويه داخله
Exterior angle	बहि:कोण	زاويه خارجه
Opposite angle	सन्मुखकोण	زاويه متقابله
Alternate angle	एकान्तरकोण	زاويه متبادله
Supplement	पूरक	تتمه
Complement	कोटि	تمامي قائمه
Vertex	शीर्ष	راس
Arm	भुज	ساق

انگریزي	هندي	اُردو
Perpendicular	लम्ब	عمود
Boundary	सीमा	حد
Figure	आकृति या चेत्र	شکل
Circle	वृत्त	دائرہ
Circumference	परिधि	محیط
Centre	केन्द्र	مرکز
Diameter	व्यास	قطر
Radius	व्यासार्द्ध या त्रिज्या	نصف قطر
Arc	चाप	قوس
Chord	चाप कर्ण या जीवा	وترقوس
Side	भुज	ضلع
Rectilineal figure	ऋजुभुज चेत्र	شکل مستقیم الاضلاع
Triangle	त्रिभुज	مثلث
Equilateral triangle	समत्रिबाहु त्रिभुज	مثلث متساوي الاضلاع
Isosceles triangle	समद्विबाहु त्रिभुज	مثلث متساوي الساقین
Scalene triangle	विषमबाहु त्रिभुज	مثلث مختلف الاضلاع
Right-angled triangle	समकोण त्रिभुज	مثلث قائم الزاویه
Hypotenuse	समकोण त्रिभुज का कर्ण	وتر مثلث قائم الزاویه
Obtuse-angled triangle	अधिककोण त्रिभुज	مثلث منفرج الزاویه
Acute-angled triangle	न्यूनकोण त्रिभुज	مثلث حادہ الزوایا
Quadrilateral figure	चतुर्भुज चेत्र	شکل ذواربعة الاضلاع
Square	वर्ग	مربع
Oblong	आयत या जात्यायत	مستطیل
Rhombus	विषमकोण समचतुर्भुज	معین
Rhomboid	अजात्यायत	شبیه بالمعین
Parallelogram	समानान्तर चतुर्भुज	متوازي الاضلاع
Trapezium	विषम चतुर्भुज	منحرف
Complement	पूरक,	متمم
Trapezoid	समलम्ब चतुर्भुज	ذوزنقه
Polygon	बहुभुज चेत्र	شکل کثیر الاضلاع

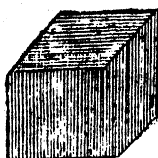
انگریزی	ہندی	اردو
Diagonal	कर्ण	وتر
Base	आधार या भूमि	قاعدہ
Postulate	आवाध्योपक्रम	اصول موضوعہ
Axiom	स्वयंसिद्धि	علوم متعارفہ
Proposition	साध्य	شکل
Problem	वस्तुपपाद्य या सोपपाद्य	شکل عملي
Theorem	प्रमेयोपपाद्य या उपपाद्य	شکل اثباتي یا نظري
Enunciation	प्रतिज्ञा	دعوی
Data	निर्दिष्ट	معلوم
Quæsita	करणीय	مطلوب
Hypothesis	कल्पित अर्थ	مقدم
Predicate	फल	تالي
Converse	प्रतिलोम या विलोम	عکس
Direct demonstration	अन्वययुक्त	ثبوت مثبتہ
Indirect demonstration	व्यतिरेकयुक्त	ثبوت منفیہ یا ثبوت بہ خلف
Corollary	अनुमान	نتیجہ صریح
Superposition	अच्छादन	تطبیق
Analysis	विवेचना	تحلیل
Synthesis	पर्य्यालोचना	ترکیب
Gnomon	मापक	علم
Commensurable quantities	परिमीय संख्या	مقادیر متوافقہ
Incommensurable quantities	अपरिमीय संख्या	مقادیر متباینہ

C. P. Press, Benares.

دیباچہ

پتھر کا ٹول جو کسی چٹان سے کاٹا گیا ہے ایک مجسم یعنی ٹھوس چیز ہے جب سنگتراش نے اسکو گڑھکر اسکا ڈول درست کر لیا تو یہہ ایک مجسم شکل بنگئی

اب فرض کرو کہ یہہ شکل ایسی ہے کہ اس ٹول میں چھہ طرفیں ہیں جو آپسمیں سب طرح سے برابر ہیں اگر کوئی شخص کھڑا ہو کر اس ٹول کے ایک کونہ پر نظر ڈالے تو اسکو تین طرفیں جیسی کہ اس تصویر میں نظر پڑتی ہیں دکھائی دینگی



اس شکل کی ہر ایک طرف کو سطح کہتے ہیں اور جب یہہ سطح ایسی ہموار اور چکنی ہے کہ اسمیں کہیں کھردراپن نہیں ہے تو یہہ سطح مستوی ہے

تیز اور پتلے کنارے جہاں کوئی دو طرفیں ملتی ہیں خط کہلاتے ہیں

وہ جگہہ جہاں کوئی تین کنارے ملتے ہیں نقطہ ہے

مقدار اسے کہتے ہیں جس کے کل اور ٹکڑوں دونوں کو ایک ہی نام سے پکار سکیں مثلاً خط ایک مقدار ہے کیونکہ ہم اس کے کل اور اس کے ہر ٹکڑے کو خط کہتے ہیں

ہر چیز کی لنبائی اور چوڑائی اور موٹائی (یا گہرائی یا اونچائی) کو امتداد کہتے ہیں

اب ہم جسم اور سطح اور خط اور نقطے کے آپس کا فرق اسطرح بیان کرتے ہیں

جسم میں تینوں امتداد ہوتے ہیں یعنی لنبائی اور چوڑائی اور موٹائی

سطح میں دو امتداد ہوتے ہیں یعنی لنبائی اور چوڑائی

خط میں ایک امتداد ہوتا ہی یعنی نری لنبائی

نقطہ میں کوئی امتداد نہیں ہوتا ہی

علم ہندسہ وہ علم ہی جسمیں مقدار متصلہ یعنی جسموں اور سطحوں اور زاویوں اور خطوں کی پیمایش سے بحث کیجاتی ہی۔ اور اُنکے آپس کے علاقے بیان ہوتے ہیں

اقلیدس ایک بڑا مشہور ریاضی داں تھا جسنے ملک مصر میں حضرت عیسی کے پیشتر ۳۲۳ سنہ اور ۲۸۳ کے درمیان شہرت پائی اور اسکندریہ کے مدرسہ ریاضی کی بنا ڈالی اُس نے علم ہندسہ کی ایسی ترتیب دی کہ اُس کا نام ہی علم ہندسہ کا دوسرا نام ہوگیا +



تحریر اقلیدس

پہلا مقالہ

حدود

یعنی کسی چیز کی خاصیتوں کا ایسا بیان کہ اُنسے وہی چیز سمجھہ مین آئے

۱ نقطہ وہ ہی جسکی کوئی جگہہ مقرر ہو لیکن اُسکے ٹکڑے نہو سکیں

کتابوں میں نقطہ کا یہہ نشان (۰) ہی یہہ نشان کتنا ہی چھوٹا کیوں نہو تو بھی اسکے ٹکڑے ہو سکتے ہیں اس سے یہہ نہ سمجھنا چاہیئے کہ نقطے کے جسکا بیان اقلیدس نے کیا ہی ٹکڑے ہو سکتے ہیں

۲ خط نری لنبائی بغیر چوڑائی کے ہی

نقطے کے حرکت کرنے سے خط پیدا ہوتا ہی اسلیئے

۳ خط کے سرے نقطے ہوتے ہیں

جہاں دو خط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں وہ بھی نقطہ ہوتا ہی

۴ خط مستقیم وہ خط ہی جو اپنے دونوں سروں کے بیچ ہموار واقع ہو

دو نقطوں کے بیچ بہت سے خط کھینچ سکتے ہیں انمیں سے وہ خط جو اُن نقطوں کے بیچ ہموار واقع ہی یعنی

جسکے سب حصے اُسی سمت میں ہیں جو اُن دو نقطوں سے پیدا ہوتی ہگ خط مستقیم ہی باقی اور جتنے خط ہیں وہ سب خط منحنی کہلاتے ہیں

۵ سطح وہ ہی جسمیں صرف لنبائی اور چوڑائی ہو

۶ سطح کے کنارے خط ہیں

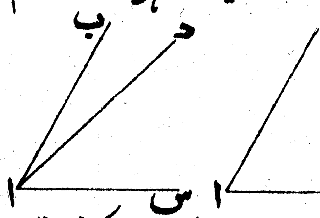
۷ سطح مستوی وہ سطح ہی کہ جسپر کوئی دو نقطے لئے جائیں اور اُن نقطوں کے بیچ خط مستقیم کھینچا جائے تو وہ خط مستقیم بالکل اُس سطح میں ہو

۸ زاویہ مسطحہ ایسے دو خط کے ایک دوسرے کی طرف جھکاؤ کو کہتے ہیں جو ایک سطح میں آپسمیں ملتے ہیں لیکن ملکر ایک خط نہیں بنجاتے ہیں

زاویہ مسطحہ دو خط منحنی یا ایک خط منحنی اور ایک خط مستقیم یا دو خط مستقیم کے ایک سطح میں ملنے سے پیدا ہوتا ہے جو ملکر ایک خط نہیں بنجاتے ہیں

۹ زاویہ مسطحہ مستقیم الخطین اُس زاویہ مسطحہ کو کہتے ہیں جو ایسے دو خط مستقیم کے ایک دوسرے کیطرف جھکاؤ سے پیدا ہو جو ملکر ایک خط مستقیم نہیں بنجاتے ہیں -

دو خط مستقیم کے ایک سطح میں ہونے کی قید اسلئے نہیں کی گئی ہو کہ دو خط مستقیم جو آپسمیں ملتے ہیں ہمیشہ ایک ہی سطح میں ہوتے ہیں



جب کسی نقطہ پر ایک ہی زاویہ ہو تو وہ ایک حرف سے جو اُس نقطہ پر لکھا ہوا ہو بیان ہو سکتا ہی جیساکہ زاویہ کا ہی لیکن جب ایک نقطہ پر ایک سے زیادہ زاویے ہوں تو انمیں سے ہر ایک زاویہ تین حرفوں سے اسطرحپر بیاں کیا جاتا ہی کہ بیچ کا حرف نقطہ پر لکھا ہوتا ہی اور ایک ایک حرف اُن دونوں خط مستقیم کے جنسے زاویہ بنتا ہی کسی جگہہ پر لکھا ہوتا ہی جو زاویہ خط ب ا اور س ا سے بنا ہی اوسکو زاویہ ب ا س اور جو زاویہ خط س ا اور د ا سے بنا ہی اُسکو زاویہ س ا د اور جو زاویہ خط ب ا اور د ا سے بنا ہی اُسکو زاویہ ب ا د کہتے ہیں

جن خطوں سے زاویہ بنتا ہی انکے گھٹنے بڑہنے سے زاویہ گھٹتا بڑہتا نہیں ہی جیسا ب ا س اور د ا ی ایک زاویہ ہی

ب د ا ی س

جس نقطہ پر زاویہ بنانیوالے خط ملتے ہیں اُسکو زاویہ کا راس اور اُن خطوں ہیں سے ہر ایک کو زاویہ کی ساق کہتے ہیں

۱۰ جب ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر کھڑا ہو کر اپنے دونوں پہلوؤں کے زاویے جنکو زاویہ متصلہ کہتے ہیں برابر بناوے تو اُن زاویوں میں سے ہر ایک کو زاویہ قائمہ اور کھڑے خط مستقیم کو دوسرے خط مستقیم پر عمود کہتے ہیں

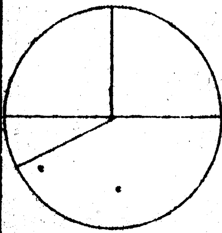
۱۱ زاویہ منفرجہ وہ زاویہ ہی جو زاویہ قائمہ سے بڑا ہو

۱۲ زاویہ حادہ وہ زاویہ ہی جو زاویہ قائمہ سے چھوٹا ہو

اگر کسی زاویہ کی ایک ساق زاویہ کی راس کی طرف بڑھائی جاوے تو ایک دوسرا زاویہ پیدا ہوگا یہہ زاویہ پہلے زاویہ کے برابر یا اُس سے چھوٹا یا بڑا ہوگا اگر برابر ہی تو پہلا زاویہ قائمہ اور اگر چھوٹا ہی تو منفرجہ اور اگر بڑا ہی تو حادہ کہلاویگا

۱۳ حد کسی چیز کے کنارہ کو کہتے ہیں

۱۴ شکل وہ ہی جو ایک یا زیادہ حد سے گھری ہو



۱۵ دائرہ وہ شکل مسطحہ ہی جو ایک خط سے جسکا نام محیط ہی گھری ہو اور اوسکے اندر ایک خاص نقطہ ایسا ہو کہ جتنے خط مستقیم اُس نقطہ سے محیط تک کھینچے جاویں وہ سب آپسمیں برابر ہوں

۱۶ اور یہہ نقطہ اُس دائرہ کا مرکز ہی

۱۷ دائرہ کا قطر وہ خط مستقیم ہی جو مرکز پر سے گذرے اور جسکے دونوں سرے محیط پر ہوں

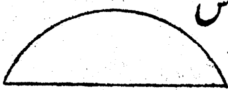
جو خط مستقیم کسی دائرہ کے مرکز سے اُسکے محیط تک کھینچا جاتا ہی اُسکو اُس دائرہ کا نصف قطر کہتے ہیں

اگر ایک خط مستقیم اپنا ایک سرا ٹھہرے ہوئے سرے کے گرد کسی سطح مستوی میں گھوم کر اپنی اصلی جگہہ پر

لوٹ آوے تو سطح جسپر یہہ خط گھوما ہی اسکو دائرہ کہتے ہین اور وہ خط جو خط مستقیم کے دوسرے سرے کے نقطہ کی حرکت سے پیدا ہوا ہی دائرہ کا محیط کہلاتا ہے اور گھومنے والے خط مستقیم کو دائرہ کا نصف قطر اور ٹھہرے ہوئے سرے کے نقطہ کو دائرہ کا مرکز کہتے ہیں +

۱۸ نصف دائرہ وہ شکل مستوی ہی جسکو قطر اور محیط کے اُس حصہ نے جو قطر سے کٹا ہی گھیرا ہو +

۱۹ قطع دائرہ وہ شکل ہی جسکو کسی خط مستقیم اور محیط کے اُس حصے نے جو اُس خط مستقیم سے کٹا ہی گھیرا ہو



قطع دائرہ کا پہلے اور دوسرے مقالہ میں کہیں کام نہیں پڑا ہی ہر نصف دائرہ قطع دائرہ ہی لیکن ہر قطع دائرہ نصف دائرہ نہیں ہی +

۲۰ شکل مستقیم الاضلاع وہ شکل ہی جو مستقیم خطوں سے گھری ہو

۲۱ مثلث وہ شکل ہی جو تین مستقیم خطوں سے گھری ہو

۲۲ شکل ذو اربعة اضلاع وہ شکل ہی جو چار مستقیم خطوں سے گھری ہو

۲۳ شکل کثیر الاضلاع وہ شکل ہی جو چار سے زیادہ مستقیم خطوں سے گھری ہو

۲۴ مثلث متساوی الاضلاع وہ مثلث ہی جسکے تینوں ضلعے آپسمین برابر ہوں

۲۵ مثلث متساوی الساقین وہ مثلث ہی جسکے دو ضلعے آپسمین برابر ہوں

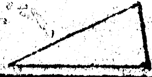
ہر مثلث متساوی الاضلاع مثلث متساوی الساقین بھی ہوتا ہی لیکن ہر مثلث متساوی الساقین مثلث متساوی الاضلاع نہیں ہو سکتا ہی

۲۶ مثلث مختلف الاضلاع وہ مثلث ہی جسکا کوئی ضلع دوسرے ضلع کے برابر نہو

۲۷ مثلث قائم الزاویہ وہ مثلث ہی جسکا ایک زاویہ قائمہ ہو

مثلث قائم الزاویہ مین زاویہ قائمہ کے سامنے کے ضلع کو وتر اور باقی دو ضلعوں مین سے ایک کو قاعدہ اور دوسرے کو عمود کہتے ہیں

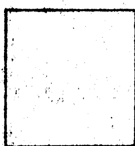
۲۸ مثلث منفرج الزاویہ وہ مثلث ہی جسکا ایک زاویہ منفرجہ ہو



۲۹ مثلث حادہ الزوایا وہ مثلث ہی جسکے تینوں زاویے حادہ ہی

مثلث حادہ الزوایا میں تینوں زاویوں کے حادّہ ہونے کی قید اسلئے کی گئی ہی کہ مثلث قائم الزاویہ اور مثلث منفرج الزاویہ میں (جیسا کہ پہلے مقالہ کی سترہویں شکل کے پڑہنے سے معلوم ہوگا) دو دو زاویے حادہ ہوتے ہیں

اگر مثلث کے صرف ضلعوں پر خیال کیا جائے تو وہ تین قسم کا ہوتا ہی یعنی مثلث تساوی الاضلاع اور مثلث تساوی الساقین اور مثلث مختلف الاضلاع اور تین ہی قسم کا اس صورت میں ہوتا ہی جب اسکے صرف زاویوں پر خیال کیا جائے یعنی مثلث قائم الزاویہ اور مثلث منفرج الزاویہ اور مثلث حادّہ الزوایا پھر مثلث کی اور بھی تقسیمیں ہو سکتی ہیں جب اسکے ضلعوں اور زاویوں دونوں پر خیال کیا جائے



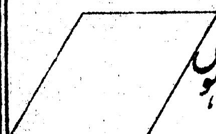
۳۰ مربع وہ شکل ذو اربعۃ الاضلاع ہی جسکے چاروں ضلعے آپسمیں برابر ہوں اور چاروں زاویے قائمے ہوں۔

مربع کی تعریف میں ایک ہی زاویہ کا قائمہ کہنا کافی ہی کیونکہ جس شکل ذو اربعۃ الاضلاع کے چاروں ضلعے آپسمیں برابر ہوں اور ایک زاویہ قائمہ ہو تو اسکے سب زاویے جیسا کہ پہلے مقالہ کی چھیالیسویں شکل میں ثابت ہوا ہی قائمے ہوتے ہیں



۳۱ مستطیل وہ شکل ذو اربعۃ الاضلاع ہی جسکے چاروں زاویے قائمے ہوں لیکن اسکے سب ضلعے آپسمیں برابر نہوں

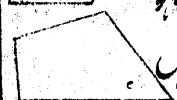
جس شکل ذو اربعۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعے برابر ہوں اور ایک زاویہ قائمہ ہو اسکو مستطیل یا قائم الزوایا کہتے ہیں



۳۲ معین وہ شکل ذو اربعۃ الاضلاع ہی جسکے سب ضلعے آپسمیں برابر ہوں لیکن اسکے زاویے قائمے نہوں

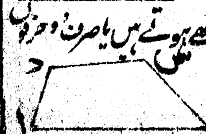


۳۳ شبیہ بالمعین وہ شکل ذو اربعۃ الاضلاع ہی جسکے آمنے سامنے کے ضلعے آپسمیں برابر ہوں لیکن نہ اسکے سب ضلعے آپسمیں برابر ہوں اور نہ اسکے زاویے قائمے ہوں



۳۴ ان چار شکلوں کے سوا ہر شکل ذو اربعۃ الاضلاع کو شکل منحرف کہتے ہیں

ہر شکل ذو اربعۃ الاضلاع کو یا تو چار ضلعوں سے جو اسکے چاروں زاویوں پر لکھے ہوتے ہیں یا صرف دو حرفوں آمنے سامنے کے زاویوں [illegible] ہیں بیان کرتے ہیں جیسا کہ اس



شکل کو ا ب س د یا ا س یا ب د سے بیان کرتے ہیں

۳۵ خطوط مستقیم متوازیہ وہ خط مستقیم ہیں جو ایک سطح میں ہوں ——————
اور جو دونوں طرف بڑھائے جاویں سے کبھی ایک دوسرے سے نہ ملیں ——————

اس سے یہہ سمجھنا چاہیے کہ اس سطح کی جو متوازی خطوں کے بیچ میں ہوتی ہی چوڑائی ہر جگہہ برابر ایک سی ہوتی ہی

و شکل متوازی الاضلاع وہ شکل ذو اربعۃ الاضلاع ہی جسکے آمنے سامنے کے ضلعے متوازی ہوں اور جو خط مستقیم کسی شکل ذو اربعۃ اضلاع کے آمنے سامنے کے زاویوں کو ملاتا ہی اسکو اس شکل کا قطر یا وتر کہتے ہیں

متوازی الاضلاع کے لفظی معنی تو یہہ ہیں کہ وہ شکل جسکے ضلعے متوازی ہوں اور اسلئے متوازی الاضلاع میں چار یا چھہ یا آٹھہ یا کوئی جفت ضلعے جنمیں آمنے سامنے کے ہر ایک دو ضلعے متوازی ہوں ہو سکتے ہیں لیکن اقلیدس میں صرف چار ہی ضلع کی شکل کو متوازی الاضلاع کہا ہی اور اسکی چار قسمیں ہیں جو حدود ۳۰ اور ۳۱- اور ۳۲- اور ۳۳ میں بیان کی گئیں +

اگر متوازی الاضلاع ا ب س د کا وتر ا س ہو اور ی ك ف اور ج ك ل متوازی اضلاع کے ضلعوں ا ب اور ا د کے متوازی ہوں تو اس متوازی الاضلاع میں چار متوازی الاضلاع بنیں گے جنمیں سے دو یعنے ا ج ك ی اور ك ف س ل میں وتر گذرتا ہی اور دو یعنے ی ك ل د اور ج ب ف ك میں وتر نہیں گذرتا ہی جن متوازی الاضلاع میں وتر نہیں گذرتا ہی انکو متوازی الاضلاع ا ج ك ی اور ك ف س ل کا متمم کہتے ہیں +

اصول موضوعہ

یعنی وہ باتیں جنکو سب نے مان لیا ہی

مان لو

۱۔ کہ کسی ایک نقطے سے کسی دوسرے نقطہ تک خط کھینچ سکتے ہیں

۲۔ کہ ایک خط مستقیم محدود کو اسکی سیدھ میں جہانتک چاہیں بڑھا سکتے ہیں

۳۔ کہ جس مرکز سے اور اس مرکز سے جس دوری پر چاہیں دائرہ کھینچ سکتے ہیں

ان اصول موضوعہ میں مسطر اور پرکار کی ضرورت پڑتی ہے

علوم متعارفہ

یعنی ایسی ظاہر باتیں جنکے ثابت کرنیکے لیے دلیل کی حاجت نہیں ہے

۱۔ جو چیزیں ایک چیز کے برابر ہوں وہ آپسمیں بھی ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں

جو چیزیں برابر چیزوں کے برابر ہوں وہ آپسمیں بھی برابر ہوتی ہیں

۲۔ اگر برابر چیزوں میں برابر برابر زیادہ کیا جائے تو بعد زیادہ کرنیکے جو چیزیں حاصل ہوں گی وہ بھی آپسمیں برابر ہوں گی

۳۔ اگر برابر چیزوں میں سے برابر برابر نکال لیا جائے تو بعد نکال لینے کے جو چیزیں حاصل ہوگی وہ بھی آپسمیں برابر ہوگی

۴۔ اگر نابرابر چیزوں میں برابر برابر زیادہ کیا جائے تو بعد زیادہ کرنیکے جو چیزیں حاصل ہوگی وہ بھی نابرابر ہوں گی

۵۔ اگر نابرابر چیزوں میں سے برابر برابر نکال لیا جائے تو بعد نکال لینے کے جو چیزیں حاصل ہوں گی وہ بھی نابرابر ہوگی

۶۔ جو چیزیں ایک ہی چیز کی دونی ہوں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں

جو چیزیں برابر چیزوں کی دونی ہوں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں

جو چیزیں ایک ہی چیز کی آدھی ہوں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں

جو چیزیں برابر چیزوں کی آدھی ہوں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں

۸ جو مقداریں ایک دوسرے کو ڈھک لیتی ہیں یعنے ایک ہی جگہہ گھیرتی ہیں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں

اسکے عکس کا استعمال بھی یعنی برابر مقداریں جب ایک دوسرے پر ایکہی طور پر رکھی جائیں تو ایک دوسرے کو ڈھک لیتی ہیں اقلیدس نے کیا ہے

۹ کل اپنے ٹکڑے سے بڑا ہوتا ہے

۱۰ دو خط مستقیم سطح کو نہیں گھیر سکتے ہیں

سطح کے گھیرنے کے لئے کم سے کم تین خط مستقیم کا ہونا ضرور ہے

۱۱ سب زاویے قائمے آپسمیں برابر ہوتے ہیں

چونکہ زاویہ ایک قسم کی مقدار ہے اسلئے یہہ علوم متعارفہ آٹھویں علوم متعارفہ کی ایک خاص صورت ہے

۱۲ اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم سے ملکر اپنی ایک سمت میں دو زاویے داخلے ایسے پیدا کرے کہ وہ دونوں زاویے ملکر دو قائموں سے چھوٹے ہوں تو وہ دو خط مستقیم لگاتار بڑھائے جانے سے کہیں نہ کہیں اس سمت میں ملجائینگے جس سمت کے زاویے دو قائموں سے چھوٹے ہیں

یہہ علوم متعارفہ پہلے مقالہ کی سترہویں شکل کا عکس یعنی الٹا ہے اور ایسی ظاہر بات نہیں ہے جسکے ثابت کرنیکے لئے دلیل کی حاجت نہو اس علوم متعارفہ کے عیوض پلیفیر صاحب نے اپنی کتاب میں یہہ علوم متعارفہ لکھا ہے "اگر دو خط مستقیم ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہوں تو وہ دونوں خط کسی ایک ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے ہیں" لیکن یہہ علوم متعارفہ بھی اعتراض سے خالی نہیں ہے کیونکہ یہہ پہلے مقالہ کی تیسویں شکل کا ایک صریح نتیجہ ہے

دسویں اور گیارہویں اور بارہویں علوم متعارفہ کو اصول موضوعہ کہنا زیادہ مناسب ہے۔

علم ہندسہ کی شکلون کا بیان

چودھویں حد میں بیان ہو چکا ہی کہ شکل وہ ہی جو ایک یا زیادہ حدوں سے گھری ہو ۔ اقلیدس میں شکل کا لفظ مسئلہ کے معنی میں بھی استعمال ہوا ہی یعنی شکل وہ ہی جسمیں کسی چیز کے بنانے یا کسی اصول کے ثابت کرنے کی غرض بیان کیجائے اور جب شکل کے یہہ معنی ہیں تو اُسکی دو قسمیں ہیں عملی اور اثباتی یا نظری ۔ ہر شکل میں کچھہ چیزیں یا اصول دیے ہوئے ہوتے ہیں اور اُنسے کچھہ دریافت کرنیکا بیان ہوتا ہی اگر دریافت کرنے سے کسی چیز کے بنانے کی غرض ہی تو اُسکو شکل عملی کہتے ہیں اور اگر دریافت کرنے سے کسی اصول کے ثابت کرنے کی غرض ہی تو اُسکو شکل اثباتی یا نظری کہتے ہیں شکل عملی میں دی ہوئی چیزوں کو معلوم اور جن چیزوں کو بنانا چاہتے ہیں اُنکو مطلوب ۔ شکل اثباتی میں دیے ہوئے اصول کو مقدم اور جو اصول اُنسے دریافت کرنا چاہتے ہیں اُنکو تالی کہتے ہیں

علم ہندسہ میں شکل ان چھہ باتوں سے پوری ہوتی ہی

۱ ۔ عام دعوی جسمیں شکل کی شرطیں عام طور پر بیان ہوتی ہیں

۲ ۔ خاص دعوی جسمیں ایک خاص شکل کھینچکر اُس پر دعوی کی شرطیں بیان کرکے ظاہر کرتے ہیں

۳ ۔ جب شکل بنجائے تو اپنے اصلی مطلب کو بیان کرنا کہ ہم یہہ بنانا یا ثابت کرنا چاہتے ہیں اور اُسی پر ساری توجہ کرنا

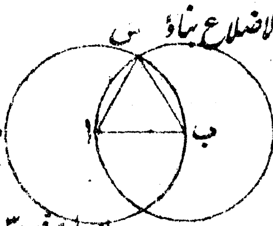
۴ ۔ شکل کے حل کرنے یا ثابت کرنے کے لئے اصول موضوعہ کے مطابق ضروری خطوط اور دائروں کو کھینچنا

۵ ۔ دلیلوں کے سلسلہ سے دعوی کو حل کرنا یا ثابت کرنا یعنی دریافت کرنا کہ دعوی ہمارا صحیح تھا یا غلط یا جو مطلب ہمارا تھا اُسکا حاصل ہونا ممکن ہی یا نہیں

۶ ۔ نتیجہ جسمیں دعوی کو پھیر کر ظاہر کرنا کہ جو چیز ہمکو بنانی تھی یا جو بات ہمکو ثابت کرنی تھی بن گئی یا ثابت ہوگئی

شکل اعملی

دیئے ہوئے محدود خط مستقیم پر مثلث متساوی الاضلاع بناؤ



فرض کرو کہ اب دیا ہوا محدود خط مستقیم ہے

اب پر مثلث متساوی الاضلاع بنانا ہے

ا مرکز سے اب دوری پر دائرہ ب س د کھینچو — اصول موضوعہ ۳

ب مرکز سے ب ا دوری پر دائرہ ا س ی کھینچو — اصول موضوعہ ۳

س نقطہ سے جسپر دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ا اور ب نقطوں تک خط مستقیم
س ا اور س ب کھینچو — اصول موضوعہ ۱

تو اب س مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

چونکہ ا مرکز دائرہ ب س د کا ہے اسلئے ا س برابر ہے اب کے — حد ۱۵

اور چونکہ ب مرکز دائرہ ا س ی کا ہے اسلئے ب س برابر ہے ب ا کے — حد ۱۵

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ ا س برابر ہے اب کے

اسلئے ا س اور ب س میں سے ہر ایک برابر اب کے ہے

لیکن جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں — علوم متعارفہ ۱
اسلئے ا س برابر ہے ب س کے

اسلئے اب اور ب س اور س ا آپسمیں برابر ہوئے

اسلئے اب س مثلث متساوی الاضلاع ہوا — حد ۲۴

اور وہ دیئے ہوئے خط مستقیم اب پر بنایا گیا ہے اور اسی کے بنانے کی ضرورت تھی

اس شکل میں اقلیدس نے اس علوم متعارفہ کو مان لیا ہے کہ جب ایک دائرہ کا مرکز دوسرے دائرہ کے محیط میں ہو تو اس دائرہ کا کچھ حصہ دوسرے دائرہ کے اندر ہوگا اور کچھ حصہ باہر اور اسلئے ان دائروں کے محیط ایک دوسرے کو دو نقطوں پر کاٹیں گے چونکہ ان نقطوں میں سے ایک نقطہ دیے

خط کے ایک طرف اور دوسرا دوسری طرف ہوگا اسلیئے دو مثلث متساوی الاضلاع اس خط پر بنینگے اور دونوں مثلث ملکر ایک شکل معین پیدا ہوگی جسکا ایک وتر دیا ہوا خط ہوگا

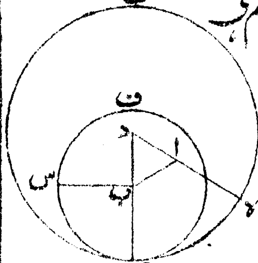
مشق

۱- دیئے ہوئے محدود خط مستقیم پر ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ جسکی ہر ایک ساق دیئے ہوئے خط کے دونی ہو

۲- دیئے ہوئے محدود خط مستقیم پر ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ جسکی ہر ایک ساق کہنی دوسرے دیئے ہوئے خط کے برابر ہو

شکل ۲ عملی

دیئے ہوئے نقطہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو جو دیئے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہو



فرض کرو کہ ا دیا ہوا نقطہ اور ب س دیا ہوا خط مستقیم ہے

اسے ب س کی برابر ایک خط مستقیم کھینچنا ہے

ا سے ب تک خط ا ب کھینچو — اصول موضوعہ ۱

اور اس پر مثلث متساوی الاضلاع ا د ب بناؤ — شکل ۱

ب مرکز سے ب س دوری پر دائرہ س ی ف کھینچو — اصول موضوعہ ۳

د ب کو ی تک بڑھاؤ — اصول موضوعہ ۲

د مرکز سے د ی دوری پر دائرہ ی ج ہ کھینچو — اصول موضوعہ ۳

د ا کو ہ تک بڑھاؤ — اصول موضوعہ ۲

تو ا ہ برابر ہوگا ب س کے

چونکہ ب مرکز دائرہ س ف ی کا ہے اسلیئے ب س برابر ہے ب ی کے — حد ۱۵

اور چونکہ د مرکز دائرہ ی ج ہ ہے اسلیئے د ہ برابر ہے د ی کے — حد ۱۵

اور ان کے حصے د ... برابر ہیں — حد ۲۴

اسلیئے باقی حصہ ا ... حصہ ب ی کے — علوم متعارفہ ۳

لیکن ثابت ہوچکا ... ب برابر ہے ب ی کے

اسلئے اہ اور ب س میں سے ہر ایک برابر ہی ب ی کے

لیکن جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں — علوم متعارفہ

اسلئے اہ برابر ہی ب س کے

اسلئے خط مستقیم اہ دیے ہوئے نقطہ ا سے برابر دیے ہوئے خط مستقیم ب س کے کھچگیا اور اسی کے کھینچنے کی ضرورت تھی

اس شکل میں جب دیا ہوا نقطہ نہ تو دیے ہوئے خط میں ہو اور نہ اس خط کی سیدھ میں ہو تو اس شکل کی آٹھ صورتیں پیدا ہوگی یعنی ایک ہی نقطہ سے آٹھ خط آٹھ طرف کھینچ سکتے ہیں کیونکہ

۱- دیے ہوئے خط کے دو سرے ہیں اور دیے ہوئے نقطہ کو ہر سرے سے ملانے کے لیئے ایک خط کھینچا جا سکتا ہی

۲- ہر ملانے والے خط کے ہر طرف مثلث متساوی الاضلاع بن سکتا ہی

۳- مثلث متساوی الاضلاع کا وہ ضلع جو شکل میں پہلے بڑھایا جاتا ہی اپنے ہر سرے کی طرف بڑھایا جا سکتا ہی

لیکن جب دیا ہوا نقطہ دیے ہوئے خط میں یا اسکی سیدھ میں ہو تو وہ صورتیں جو نقطہ کو خط کے ہر سرے سے ملانے سے پیدا ہوتی تھیں ایک ہو جائینگی اور اسلئے شکل کی صرف چار صورتیں رہجائینگی

جب دیا ہوا نقطہ دیے ہوئے خط کے سرے پر واقع ہو تو شکل بہت آسان ہی نقطہ کو مرکز مان کر اس خط کی دوری پر دائرہ کھینچو اور خط کو دائرہ کے محیط تک بڑھاؤ بڑھا ہوا حصہ دیے ہوئے خط کے برابر ہوگا

مدرس کو چاہئے کہ اپنے لڑکوں سے اس شکل کی سب صورتیں کھچوائے

مشق

اگر اس شکل میں چھوٹے دائرہ کا قطر بڑے دائرہ کا نصف قطر ہو تو بتاؤ کہ دیا ہوا نقطہ اور بنائے ہوئے مثلث کا راس کہاں ہوگا

شکل ۳ عملی

دیے ہوئے دو خط مستقیم میں جو بڑا ہو اسمیں — بڑ برابر ہی اور اسکے برابر ہی

ہی اور اسے برابر ہی — علوم متعارفہ

فرض کرو کہ دیے ہوئے دو خط مستقیم اب اور س د ہیں اب بڑا ہے
اب میں سے س د کے برابر ایک حصہ کاٹنا ہے
نقطہ ا سے س د کے برابر خط مستقیم ای کھینچو شکل
امرکز سے ای دوری پر دائرہ ف ی ج
خط مستقیم اب کو نقطہ ج پر کاٹتا ہوا کھینچو
تو اج برابر س د کے ہوگا

س —— د
ی
ف
ا
ج
ب

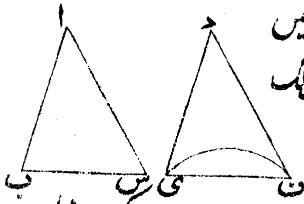
چونکہ امرکز دائرہ ف ی ج کا ہے اسلئے اج برابر ہے ای کے — حد ۱۵
لیکن ای برابر س د کے بنایا گیا ہے
اسلئے اج اور س د میں سے ہر ایک برابر ہے ای کے
اسلئے اج برابر ہے س د کے — علوم متعارفہ ۱
اسلئے دیے ہوئے بڑے خط اب میں سے ایک حصہ اج برابر چھوٹے
خط س د کے کٹگیا اور اسیکے کاٹنے کی ضرورت تھی

مشق

دیے ہوئے دو خط مستقیم میں جو چھوٹا ہو اسکو بڑھا کر بڑے کی برابر بنانا

شکل ۴ اثباتی

اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں
کے الگ الگ برابر ہوں اور ان ضلعوں سے بنے ہوئے زاویے بھی آپسمیں برابر
ہوں تو ان مثلثوں کے قاعدے یعنی تیسرے ضلعے بھی آپسمیں برابر ہوں گے اور
دونوں مثلث بھی آپسمیں برابر ہوں گے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ
باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپسمیں برابر ہونگے



فرض کرو کہ دو مثلث اب س اور دی ف ہیں
مثلث اب س کے دو ضلعے اب اور اس الگ الگ
برابر ہیں مثلث د ی ف کے دو ضلعوں
د ی اور د ف کے یعنی اب برابر دی کے اور اس برابر د ف کے اور زاویہ
ب اس برابر ہی زاویہ ی د ف کے
تو قاعدہ ب س برابر ہوگا قاعدہ ی ف کے اور مثلث اب س برابر مثلث
دی ف کے اور باقی زاویے جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں الگ الگ برابر ہونگے یعنی زاویہ
اب س برابر ہوگا زاویہ د ی ف کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ د ف ی کے
کیونکہ اگر مثلث اب س مثلث د ی ف کے اوپر اسطرح سے رکھا جاوے کہ نقطہ
ب نقطہ ی پر ہو اور خط مستقیم ب ا خط مستقیم ی د پر
تو چونکہ ب ا برابر ہی ی د کے (بموجب فرض) نقطہ ا نقطہ د پر پڑیگا
اور جب کل خط مستقیم ب ا نے کل خط مستقیم ی د کو ڈھک لیا تو چونکہ زاویہ
ب اس برابر ہی زاویہ ی د ف کے خط مستقیم اس خط مستقیم د ف پر پڑیگا
اور چونکہ اس برابر ہی د ف کے (بموجب فرض) نقطہ س نقطہ ف پر پڑیگا
لیکن یہہ بیان ہو چکا ہی کہ نقطہ ب نقطہ ی کے اوپر ہی
اسلئے کل قاعدہ ب س کل قاعدہ ی ف کو ڈھک لیگا
کیونکہ جب نقطہ ب نقطہ ی پر ہوا اور نقطہ س نقطہ ف پر اگر کل قاعدہ ب س
کل قاعدہ ی ف پر نہیں پڑتا ہے تو دو خط مستقیم ب س اور ی ف ایک سطح کو گھیر لینگے
اور یہہ بات ناممکن ہی — علوم متعارفہ ۱۰
اسلئے کل قاعدہ ب س کل قاعدہ ی ف پر پڑیگا — جسکو ڈھکیگا
اور کل مثلث اب س کل مثلث د ی ف

اور باقی زاویے ایک مثلث کے دوسرے مثلث کے باقی زاویوں کو پورا پورا
ڈھک لیتے ہیں اور انکے برابر ہیں یعنی زاویہ ا ب س برابر ہی زاویہ د ی ف
کے اور زاویہ ا س ب برابر زاویہ د ف ی کے
اسلئے اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے
دو ضلعوں کے الخ یہی ثابت کرنا تھا

نقطہ انطباق یعنی اوپر نقطہ رکھ کا نقطوں پر برابر ثابت کرنے میں اقلیدس نے آٹھویں علوم متعارفہ
کے عکس کا استعمال کیا ہی

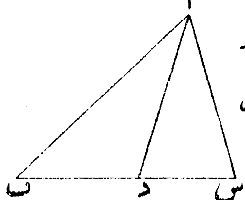
۔ مثلث میں چھ مقداریں ہوتی ہیں یعنی تین ضلعے اور تین زاویے اور (سوائے ادو خاص صورتوں کے) جب
ان چھ مقداروں میں سے کوئی تین دی ہوئی ہوں تو باقی تین دریافت ہو سکتی ہیں اور مثلث معلوم
ہو سکتا ہی اسلئے اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کی تین مقداریں جنسے مثلث معلوم ہو سکتا ہی دوسرے مثلث
کی انھیں تین مقداروں کے الگ الگ برابر ہوں تو یہ ثابت ہو سکتا ہی کہ مثلث بھی آپسمیں برابر ہونگے
ان تین مقداروں کی چھ صورتیں ہو سکتی ہیں اور وہ یہہ ہیں

۱ تین زاویے
۲ تین ضلعے
۳ دو ضلعے اور انسے بنا ہوا زاویہ
۴ دو ضلعے اور انمیں سے ایک ضلع کے سامنے کا زاویہ
۵ دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع
۶ دو زاویے اور ان میں سے ایک زاویہ کے سامنے کا ضلع

پہلی صورت ان دو صورتوں میں سے ہی جنمیں مثلث نہیں دریافت ہو سکتا ہی کیونکہ مثلث کے
ضلعے بغیر زاویوں کے گھٹنے بڑھنے کے گھٹ بڑھ سکتے ہیں
دوسری صورت اس مقالہ کی آٹھویں شکل میں ثابت ہوئی ہی

تیسری صورت اس شکل میں ثابت ہوتی ہے

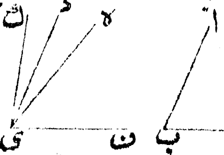
چوتھی صورت میں بھی مثلث ٹھیک ٹھیک نہیں معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہہ ممکن ہے کہ ایک مثلث کے
دو ضلعے تو دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ایک ضلعے کے سامنے کا زاویہ بھی برابر ہو
دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے جو پہلے ضلع کے برابر ضلع کے سامنے ہے لیکن مثلث آپسمیں برابر نہوں مثلاً فرض کرو



کہ ا د س ایک مثلث متساوی الساقین ہے جسکے ضلعے ا د اور ا س آپسمیں برابر
ہیں س د کو کسی نقطہ ب تک بڑھاؤ اور ا ب ملاؤ اب یہہ ظاہر ہے کہ مثلث
ا ب س اور ا ب د میں ضلعے ا ب اور ا س تو برابر ہیں ضلعوں
ا ب اور ا د کے اور زاویہ ب جو برابر ضلعوں ا س اور ا د کے سامنے ہے دونوں مثلثوں میں شامل ہے
لیکن مثلث آپسمیں برابر نہیں ہیں

پانچویں اور چھٹی صورتیں اس مقالہ کی چھبیسویں شکل میں ثابت ہوتی ہیں

اس بات کے دریافت کرنیکے لئے کہ دو مقداریں ایک ہی جگہہ گھیرتی ہیں یا نہیں یعنی ایک دوسری کو
پورا پورا ڈھک لیتی ہیں یا نہیں انکو ایک دوسری پر رکھنے کو (جیسا کہ اس مقالہ کی چوتھی شکل میں مثلث ایک
دوسرے پر رکھے گئے ہیں) عمل تطبیق کہتے ہیں آٹھویں علوم متعارفہ میں یہہ بیان ہوا ہے کہ جو مقداریں ایک ہی جگہہ گھیرتی ہیں
وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں مثلاً اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے پر اس طرح رکھے جاسکیں کہ ایک کے دونوں سرے دوسرے کے دونوں
سروں پر پڑیں تو وہ خط مستقیم آپسمیں برابر ہوتے ہیں اور اگر دو زاویوں کو ہم ایک دوسرے پر اس طرح رکھ سکیں
کہ ایک کا راس دوسرے کے راس پر ہو اور ایک کی ساقوں کی سمتیں بھی دوسرے کی ساقوں کی سمتوں پر پڑیں تو
وہ زاویے آپسمیں برابر ہوتے ہیں کیونکہ ساقوں کی لمبائی کے گھٹنے بڑھنے سے جیسا کہ ہم نویں حد میں
بیان کر چکے ہیں زاویہ گھٹتا بڑھتا نہیں ہے اگر دو سطح مستوی ایک دوسری پر اس طرح رکھی جاسکیں کہ ایک
کے ضلعوں کی سمتیں اور لمبائی دوسرے کے ضلعوں کی سمتوں اور لمبائی کو پورا پورا ڈھک لیویں تو وہ سطحیں آپسمیں



برابر ہوتی ہیں لیکن جب دو مقداریں ایک دوسرے کو پورا پورا نہیں ڈھک
لیتی ہیں تو وہ نابرابر ہوتی ہیں فرض کرو کہ ا ب س اور ی ق

دو زاویے ہیں اور زاویہ اب س کا راس زاویہ د ی ف کے راس ی پر رکھا گیا اور خط ب س کی سمت ی ف کی سمت پر رکھی گئی پس اگر خط ب ا کی سمت خط ی د کی سمت پر پڑتی ہے تو زاویے اب س اور د ی ف آپس میں برابر ہوتے ہیں اور اگر ب ا کی سمت ی ہ کی سمت پر یعنی ف ی اور ی د کی سمتوں کے درمیان پڑتی ہے تو زاویہ اب س زاویہ د ی ف سے چھوٹا ہوتا ہے اور اگر ب ا کی سمت ی ک کی سمت پر پڑتی ہے یعنی ی د کی سمت ی ف اور ی ک کی سمتوں کے درمیان ہو تو زاویہ اب س زاویہ د ی ف سے بڑا ہوتا ہے

بعض ریاضی داں تطبیق کے عمل کو پسند نہیں کرتے ہیں اور ڈیمارگن صاحب نے لکھا ہے کہ اس عمل کے لئے اس اصول موضوعہ کے مان لینے کی ضرورت ہے کہ ہر شکل مستوی کو بغیر اسکی صورت اور وضع تبدیل کئے ہوئے ایک جگہہ سے اٹھا کر دوسری جگہہ پر رکھ سکتے ہیں اور سطح میں اسکو لوٹ سکتے ہیں نیز اس بات کا مان لینا بھی ضروری ہے کہ اگر ایک خط مستقیم کا دو نقطوں کے درمیان کا حصہ دوسرے خط مستقیم کے دو نقطوں کے درمیان کے حصہ پر پڑتا ہے تو ان خط مستقیم کے باقی حصوں کی سمتیں بھی ایک دوسری پر پڑتی ہیں

مثلث کے کسی دو ضلعوں کو چھوڑ کر تیسرے ضلع کو قاعدہ کہتے ہیں

نتیجہ صریح اگر مثلثوں کے ضلعے اب اور د ی یا ضلعے ا س اور د ف قاعدہ کی طرف بڑھائے جاویں تو عمل تطبیق سے ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویے جو ضلعوں کے بڑھا دینے سے قاعدے کے دونوں طرف پیدا ہوتے ہیں برابر ہیں

مشق

۱ اگر دو مربعوں میں ایک مربع کا ایک ضلع دوسرے مربع کے ایک ضلع کے برابر ہو تو وہ دونوں مربع آپس میں سب طرح سے برابر ہوں گے

۲ اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں کاٹتے ہوں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویے قائمے بھی بناتے ہوں تو انمیں سے ہر ایک خط کا ہر نقطہ دوسرے خط کے سروں سے برابر دوری پر ہوگا

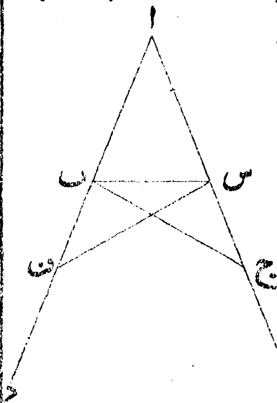
۳ ذو اربعۃ الاضلاع اب س د کے ضلعے اب اور اد آپس میں برابر ہیں اور وتر اس زاویہ ب ا د کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے ثابت کرو کہ ضلعے ب س اور د س آپس میں برابر ہیں اور وتر اس

زاویہ ب س د کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہی

۴ مثلث متساوی الاضلاع کے کسی زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہوا خط اس زاویہ کے
سامنے کے ضلع کو بھی دو برابر حصوں میں تقسیم کریگا اور اسکے ساتھہ زاویے قایمے بنائیگا

شکل ۵ اثباتی

مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے اوپر کے زاویے آپسمیں برابر ہوتے
ہیں اور اگر برابر ساقین بڑھائی جایئں تو قاعدہ کے نیچے کے زاویے بھی آپسمیں برابر ہونگے



فرض کرو کہ ا ب س مثلث متساوی الساقین ہی جسکا
ضلع ا ب ضلع ا س کے برابر ہی اور یہہ بھی فرض کرو کہ برابر
ساقین ا ب اور ا س نقطوں د اور ی تک بڑھائی گئی ہیں
تو زاویہ ا ب س برابر ہوگا زاویہ ا س ب کے اور زاویہ
د ب س برابر ہوگا زاویہ ی س ب کے
ب د میں کوئی نقطہ ف مقرر کرو
شکل ۳ — اور بڑے خط ا ی میں سے ا ج برابر ا ف کے کاٹ لو
اصول موضوعہ — اور ف س اور ج ب کو ملا دو
چونکہ ا ج برابر ا ف کے بنایا گیا ہی
فرض — اور ا ب برابر ہی ا س کے
اسلیئے مثلث ف ا س کے دو ضلع ف ا اور ا س الگ الگ برابر ہیں مثلث ج ا ب
کے دو ضلعوں ج ا اور ا ب کے
اور ان ضلعوں کے درمیان کا زاویہ ف ا ج دونوں مثلثوں میں مشترک ہی
اسلیئے قاعدہ ف س برابر ہی قاعدہ ج ب کے اور مثلث ف ا س برابر ہی مثلث
ج ا ب کے اور باقی زاویے ان مثلثوں کے جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں الگ الگ برابر ہیں

زاویہ اس ف برابر ہی زاویہ اب ج کے اور زاویہ اف س برابر زاویہ اج ب کے — شکل ۴

چونکہ کل اف برابر ہی کل اج کے اور اُنکے حصے اب اور اس آپسمیں برابر ہیں

اسلئے باقی حصہ ب ف برابر ہی باقی حصہ س ج کے — علوم متعارفہ ۳

اور ف س برابر ج ب کے ثابت ہو چکا ہی

اب چونکہ دو ضلعے ب ف اور ف س الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں س ج

اور ج ب کے اور زاویہ ب ف س برابر زاویہ س ج ب کے ثابت ہو چکا ہی

اسلئے مثلث ب ف س اور س ج ب آپسمیں برابر ہیں اور اُنکے باقی زاویے

جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں الگ الگ برابر ہیں یعنی زاویہ ف ب س برابر زاویہ ج س ب

کے اور زاویہ ب س ف برابر زاویہ س ب ج کے — شکل ۴

اور چونکہ یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ کل زاویہ اب ج برابر ہی کل زاویہ اس ف کے اور

اُنکے حصے س ب ج اور ب س ف آپسمیں برابر ہیں

اسلئے باقی زاویہ اب س برابر ہی باقی زاویہ اس ب کے — علوم متعارفہ ۳

اور یہہ زاویے مثلث متساوی الساقین اب س کے قاعدہ کے اوپر کے ہیں

اور یہہ بھی ثابت ہو چکا ہی کہ زاویے ف ب س اور ج س ب آپسمیں برابر ہیں

اور یہہ زاویے قاعدہ کے نیچے کے ہیں

اسلئے مثلث متساوی الساقین کے الخ — یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کو ہم اسطرح بھی ثابت کر سکتے ہیں اگر ہم مثلث اب س کو سطح میں لوٹ کر اسطرح رکھیں

کہ نقطہ ا کی جگہہ نہ تبدیل ہو اور ضلع اب ضلع اس پر ہو چونکہ زاویہ ا دونوں مثلثوں میں مشترک ہی ضلع اس

ضلع اب پر پڑیگا اور چونکہ اب اور اس آپسمیں برابر ہیں نقطہ س نقطہ ب پر پڑیگا اور نقطہ ب نقطہ س پر پڑیگا

اسلئے زاویہ اس ب زاویہ اب س کو پورا پورا ڈھک لیگا اور زاویہ ب س ج زاویہ س ب ف کو

زاویہ اس ب برابر ہوگا زاویہ اب س کے اور زاویہ ب س ج برابر زاویہ س ب ف کے

نتیجہ صریح مثلث متساوی الاضلاع کے سب زاویے آپسمیں برابر ہوتے ہیں

مشق

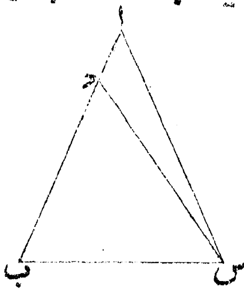
۱ شکل معین میں آمنے سامنے کے زاویے آپسمیں برابر ہوتے ہیں

۲ اگر ایک ہی قاعدہ پر دو مثلث متساوی الساقین ہوں اور قاعدہ کے سامنے کے زاویوں کے درمیان ایک خط کھینچا جائے تو وہ خط (یا خط بڑھکر) قاعدہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریگا اور اُسکے ساتھہ زاویے قائمے بنائیگا

شکل ۶ اثباتی

اگر کسی مثلث کے دو زاویے آپسمیں برابر ہوں تو اُن زاویوں کے سامنے کے ضلعے آپسمیں برابر ہوں گے

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہی اور اُسکے زاویے اب س اور اس ب آپسمیں برابر ہیں



شکل ۴

تو ضلعے اس اور اب بھی آپسمیں برابر ہوں گے

اگر اس اور اب آپسمیں برابر نہوں تو اُنمیں سے ایک دوسرے سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ اب بڑا ہی اس سے

اب میں سے ب د برابر اس کے کاٹ لو

اور س د ملاؤ

اب چونکہ مثلث د ب س اور اس ب میں د ب برابر ہی اس کے اور ب س دونوں میں مشترک ہی یعنی دو ضلعے د ب اور ب س ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں دوسرے مثلث کے دو ضلعوں اس اور س ب کے

اور زاویہ د ب س برابر ہی زاویہ اس ب کے فرض

اسلئے قاعدہ د س برابر ہی قاعدہ اب کے اور مثلث د ب س برابر ہی مثلث

اس ب کے

شکل ۴

اپنے چھوٹا مثلث برابر ہی بڑے مثلث کے اور یہہ بات صاف جھوٹھہ ہی

علوم متعارفہ ۹

اسلئے اب اور اس نابرابر نہیں ہیں یعنی اس برابر ہی اب کے

اسواسطے اگر دو زاویے الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یاد رکھنا چاہئے کہ اب میں سے چھوٹے خط کی برابر حصہ زاویہ ب کی طرف سے کاٹنا چاہئے

نہیں تو چوتھی شکل سے اس شکل کا ثابت کرنا غیر ممکن ہوگا

یہہ شکل پانچویں شکل کے پہلے حصہ کا عکس ہی یعنی اس شکل میں جو بات مقدم اور موضوع کی جگہہ پر ہی

اس حصہ میں تالی اور محمول کی جگہہ پر ہی اور جو بات اسمیں تالی اور محمول کی جگہہ پر ہی اسمیں مقدم

اور موضوع کی جگہہ پر ہی جیسا کہ ان دونوں شکلوں کو اسطرح پر بیان کرنے سے صاف ظاہر ہوگا

شکل ۵	اگر دو ضلعے برابر ہیں	تو اُنکے سامنے کے زاویے برابر ہیں
شکل ۶	اگر دو زاویے برابر ہیں	تو اُنکے سامنے کے ضلعے برابر ہیں

یہہ شکل ثبوت بہ خلف سے ثابت کی گئی ہی جب ہم کسی شکل کے نتیجہ کو صحیح نمانکر اُسکے خلاف کو

صحیح مانتے ہیں اور اُس سے آخر کو ایک ایسا نتیجہ نکلتا ہی جو صاف جھوٹھہ ہی یا شکل میں جو بات فرض

کی گئی ہی اُسکے خلاف ہی تو ہم کہتے ہیں کہ شکل کے نتیجہ کا خلاف جسکو ہم نے صحیح مانا تھا غلط ہی اور

اسلئے شکل کا نتیجہ صحیح ہی ایسے ثبوت کو ثبوت بہ خلف کہتے ہیں اس قسم کے ثبوت کا استعمال اقلیدس نے

شکلوں کے عکس ثابت کرنے میں اکثر کیا ہی

اس شکل کی ضرورت دوسرے مقالہ کی چوتھی شکل تک نہیں پڑتی ہی اگر ہم اسکو کہیں دوسری جگہہ

پر اٹھا کر رکھدیں تو کچھہ خرابی نہیں پیدا ہوگی مثلاً اگر ہم اسکو اٹھارہویں شکل کے بعد رکھیں تو یہہ

اسطرح ثابت ہو سکتی ہی فرض کرو کہ زاویہ اب س زاویہ اس ب کے برابر ہی تو ضلع اس بھی

اب کے برابر ہوگا اگر یہہ ضلعے آپس میں برابر نہوں تو ایک اُنمیں سے بڑا ہوگا فرض کرو کہ اب بڑا ہے

تو زاویہ اس ب زاویہ اب س سے بڑا ہوگا (شکل ۱۸) لیکن یہہ ناممکن ہی کیونکہ زاویے

اس ب اور اب س جو چھٹی شکل سے آپس میں برابر ہیں اسلئے اب اور اس نابرابر نہیں ہیں یعنی
اب برابر ہے اس کے اور اگر اس شکل کو چھبیسویں شکل کے بعد لکھیں تو اسطرح ثابت کریں گے کہ زاویہ
ب اس کو خط اد سے جو قاعدہ ب س سے نقطہ د پر ملتا ہے دو برابر حصوں میں تقسیم کرو ایسے دو مثلث
دو مثلث اب د اور اس د پیدا ہونگے اور وہ چھبیسویں شکل کے حکم سے آپس میں سب طرح
برابر ہونگے اور ضلع اب ضلع اس کے برابر ہوگا اس شکل کو تطبیق کے عمل سے بھی جیسا ہم نے
پانچویں شکل کو ثابت کیا ہے ثابت کرسکتے ہیں

نتیجہ صریح مثلث متساوی الزوایا کے سب ضلعے آپس میں برابر ہوتے ہیں

مشق

١ اگر مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے اوپر کے زاویہ اب س اور اس ب خط ب د
اور س د سے دو برابر حصوں میں تقسیم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ ب س د مثلث متساوی الساقین ہے

٢ مثلث اب س کا زاویہ ب زاویہ س سے دونا ہے اگر خط ب د زاویہ ب کو دو برابر حصوں میں تقسیم
کرکے ضلع اس سے د نقطہ پر ملے تو ثابت کرو کہ ب د برابر اد کے ہے

٣ پہلے مقالہ کی پانچویں شکل میں اگر ف س اور ب ج نقطہ ہ پر ملیں تو ف ہ برابر ج ہ کے ہوگا

٤ پہلے مقالہ کی پانچویں شکل میں اگر ف س اور ب ج نقطہ ہ پر ملیں تو خط اہ زاویہ ب اس
کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریگا

شکل ٧ اثباتی

اگر ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی طرف دو مثلث ہوں تو ممکن نہیں ہے کہ انکے وہ
ضلعے جنکے سرے قاعدہ کے ایک سرے پر ہوں آپسمیں برابر ہوں اور وہ ضلعے بھی
جنکے سرے قاعدہ کے دوسرے سرے پر ہوں آپسمیں برابر ہوں

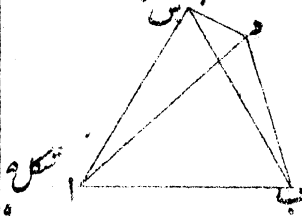
اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک ہی قاعدہ اب پر اور اسکے ایک ہی طرف ایسے
دو مثلث اس ب اور اد ب ہیں کہ انکے ضلعے س ا اور د ا جنکے سرے قاعدہ کے سرے

ا پہ ہیں آپسمیں برابر ہیں اور ضلعے س ب اور د ب بھی جنکے سر قاعدہ کے سرے

ب پر ہیں آپسمیں برابر ہیں

س د ملاؤ اس شکل کی تین صورتیں ہیں پہلی صورت یہہ ہی کہ ہر مثلث کا راس

دوسرے مثلث کے باہر ہو



شکل ۹

علوم متعارفہ ۹

چونکہ اد برابر اس کے فرض کیا گیا ہی

اسلئے زاویہ اس د برابر ہی زاویہ ادس کے

لیکن زاویہ اس د زاویہ ب س د سے بڑا ہی

اسلئے زاویہ ادس بھی زاویہ ب س د سے بڑا ہی

اور اسواسطے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے اور بھی زیادہ بڑا ہی

پھر چونکہ ب س برابر ب د کے فرض کیا گیا ہی

اسلئے زاویہ ب د س برابر ہی زاویہ ب س د کے

شکل ۵

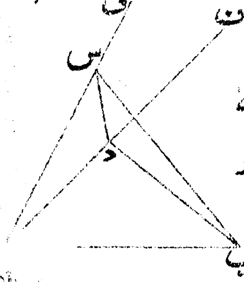
لیکن یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا ہی

اسلئے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا اور اسکے برابر بھی ہی

اور یہہ بات ناممکن ہی

دوسری صورت یہہ ہی کہ مثلث ادب کا راس د مثلث اس ب کے اندر ہی

اس اور اد کو ی اور ف نقطوں تک بڑھاؤ



چونکہ مثلث اس د میں ضلع اس برابر ہی اد کے

اسلئے قاعدہ س د کے نیچے کے زاویے ی س د

شکل ۵

اور ف د س آپسمیں برابر ہیں

علوم

ی س د زاویہ ب س د سے بڑا ہی

پہ ف د س بھی زاویہ ب س د سے بڑا ہی

اور اسواسطے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے اور بھی زیادہ بڑا ہی

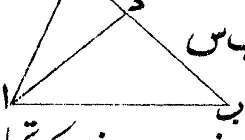
پھر چونکہ ب س برابر ب د کے فرض کیا گیا ہی

اسلئے زاویہ ب د س زاویہ ب س د کے برابر ہی ‏ شکل ۵

لیکن یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا ہی

اسلئے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا اور اُسکے برابر بھی ہی

اور یہہ بات ناممکن ہی



تیسری صورت جسمیں مثلث ا د ب کا راس د مثلث ا س ب کے ضلع پر ہی اس صورت میں صاف ظاہر ہی کہ ب د اور ب س آپسمیں برابر نہیں ہوسکتے ہیں ‏ علوم متعارفہ ۹

اسلئے اگر ایک ہی قاعدہ پر اور اُسکے ایک ہی طرف دو مثلث الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کا کام پہلے مقالہ کی صرف آٹھویں شکل کے ثابت کرنے میں پڑتا ہی سو آٹھویں شکل کا ثبوت دوسرے طور پر بھی ہوسکتا ہی اور اُس ثبوت میں اس شکل کی کچھہ ضرورت نہیں پڑتی

اقلیدس نے اس شکل کے ثابت کرنے میں شکل کے نتیجہ کے خلاف کو صحیح مانکر اس سے آخر کو ایسی دو باتیں نکالی ہیں جو ایک دوسرے کی ضد ہیں یعنی ایک زاویہ دوسرے زاویہ سے بڑا اور اُسکے برابر بھی ہی

اس قسم کے ثبوت کا استعمال اقلیدس نے صرف اسی شکل میں کیا ہی اور کسی دوسری جگہہ پر نہیں کیا ہی

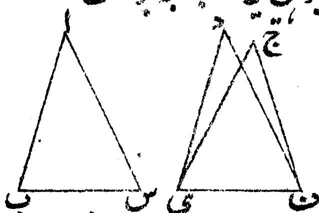
یاد رکھنا چاہئے کہ ایک ہی قاعدہ پر اور اُسکے ایک ہی طرف ایسے دو مثلث ہوسکتے ہیں کہ اُنکے وہ ضلعے جنکے سرے قاعدہ کے ایک سرے پر ہوں آپسمیں برابر ہوں مگر وہ ضلعے جنکے سرے قاعدہ کے دوسرے سرے پر ہوں نابرابر ہوں

شکل ۸ اثباتی

اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں اور اُنکے قاعدے بھی آپسمیں برابر ہوں تو زاویہ جو ایک مثلث کے دو ضلعوں سے بنتا ہی

برابر ہوگا دوسرے مثلث کے اُس زاویہ کے جو اُن ضلعوں کے برابر ضلعوں سے بنتا ہی

فرض کرو کہ مثلث اب س کے دو ضلعے اب اور اس مثلث دی ف کے دو ضلعوں دی اور دف کے الگ الگ برابر ہیں یعنی اب برابر دی کے اور



اس برابر دف کے ہی اور قاعدہ ب س بھی برابر قاعدہ ی ف کے ہی تو زاویہ ب اس برابر ہوگا زاویہ ی د ف کے

کیونکہ اگر مثلث اب س مثلث دی ف پر اسطرح رکھا جائے کہ نقطہ ب نقطہ ی پر اور خط ب س خط ی ف پر ہو تو چونکہ ب س برابر ہی ی ف کے (فرض) نقطہ س نقطہ ف پر پڑیگا

اور جب قاعدہ ب س قاعدہ ی ف پر پورا پورا پڑتا ہی تو ضلعے ب ا اور س ا ضلعوں ی د اور ف د پر پڑیں گے

کیونکہ اگر قاعدہ ب س قاعدہ ی ف پر پڑے لیکن ضلعے ب ا اور س ا ضلعوں ی د اور ف د پر نہ پڑیں بلکہ مختلف جگہوں پر ی ج اور ف ج کے طرح پڑیں تو ایک ہی قاعدہ پر اور اُسکے ایک ہی طرف ایسے دو مثلث واقع ہوں گے کہ اُنکے وہ ضلعے جنکے سرے قاعدہ کے ایک سرے پر ہیں آپسمیں برابر ہیں اور اُنکے وہ ضلعے بھی جنکے سرے قاعدہ کے دوسرے سرے پر ہیں آپسمیں برابر ہیں لیکن یہہ ناممکن ہی

شکل ۷

اسلئے اگر قاعدہ ب س قاعدہ ی ف پر پڑتا ہی تو ضلعے ب ا اور س ا ضلعوں ی د اور ف د پر ضرور پڑتے ہیں

اور اسلئے زاوئے ب اس اور ی د ف ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک

اور اسلئے وہ آپسمیں برابر ہیں

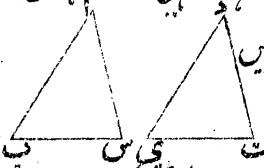
اسواسطے اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الخ -

یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح اس سے ثابت ہو سکتا ہی کہ برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے بھی آپسمیں برابر ہیں یعنی زاویہ ب برابر زاویہ ی کے اور زاویہ س برابر زاویہ ف کے اور دونوں مثلث بھی آپسمیں برابر ہیں

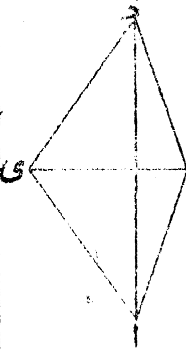
اس شکل کو بغیر ساتویں شکل کی مدد کے اسطرح ثابت کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ مثلث ا ب س اور د ی ف اسطور سے رکھے گئے ہیں کہ قاعدہ ب س قاعدہ ی ف پر ہو اور مثلثوں کی راسیں ا اور د ایک دوسرے کے سامنے ہیں



دا ملاؤ   اسکی تین صورتیں ہیں

پہلی صورت یہ ہی کہ د ا قاعدہ ی ف کو ی اور ف کے درمیان کاٹتا ہی



چونکہ مثلث ا ی د میں ضلع ا ی ضلع د ی کے برابر ہی

اسلئے زاویہ ی د ا زاویہ ی ا د کے برابر ہی   شکل ۵

اور چونکہ مثلث ا ف د میں ضلع ا ف ضلع د ف کے برابر ہی

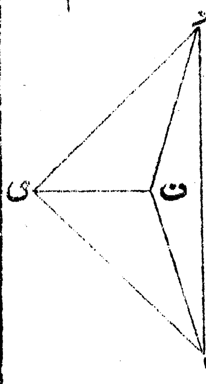
اسلئے زاویہ ف د ا زاویہ ف ا د کے برابر ہی   شکل ۵

لیکن ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ ی د ا زاویہ ی ا د کے برابر ہی

اسلئے کل زاویہ ی د ف کل زاویہ ی ا ف کے برابر ہی   علوم متعارفہ ۲

لیکن زاویہ ی ا ف زاویہ ب ا س ہی

اسلئے زاویہ ب ا س زاویہ ی د ف کے برابر ہی



دوسری صورت یہ ہی کہ د ا قاعدہ ی ف کو نہ کاٹے

چونکہ مثلث ا ی د میں ضلع ا ی ضلع د ی کے برابر ہی

اسلئے زاویہ ی د ا زاویہ ی ا د کے برابر ہی   شکل ۵

اور چونکہ مثلث ا ف د میں ضلع ا ف ضلع د ف کے برابر ہی

اسلئے زاویہ ف د ا زاویہ ف ا د کے برابر ہی — شکل ۵

لیکن ثابت ہوچکا ہی کہ کل زاویہ ی د ا زاویہ ی ا د کے برابر ہی

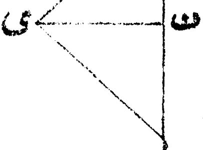
اور اسکے حصے ف د ا اور ف ا د آپسمیں برابر ہیں

اسلئے باقی حصہ ی د ف برابر ہی باقی حصہ ی ا ف کے — علوم متعارفہ ۳

لیکن زاویہ ی ا ف زاویہ ب ا س ہی

اسلئے زاویہ ب ا س زاویہ ی د ف کے برابر ہی

تیسری صورت یہہ کہ ا ف اور د ف ایک ہی سیدھمیں ہیں یعنے ا د قاعدہ کے ایک سرے پر ہوکر گذرتا ہی



چونکہ مثلث ا ی د میں د ی برابر ہی ا ی کے

اسلئے زاویہ ی ا ف برابر زاویہ ی د ف کے ہی — شکل ۵

لیکن زاویہ ی ا ف زاویہ ب ا س ہی

اسلئے زاویہ ب ا س زاویہ ی د ف کے برابر ہی

یہہ شکل پہلے مقالہ کی چوتھی شکل کا عکس ہی جب کسی شکل اثباتی میں کئی باتیں فرض کی ہوئی ہوں اور انکا ایک نتیجہ ہو اگر کوئی دوسری شکل ایسی بنائی جاوے کہ پہلی شکل کی فرض کی ہوئی باتوں میں سے ایک بات اس شکل کا نتیجہ ہو اور پہلی شکل کا نتیجہ معہ باقی فرض کی ہوئی باتوں کے اس شکل میں فرض کی ہوئی باتیں ہوں تو ایسی دو شکلوں کو بھی ایک دوسرے کا عکس کہتے ہیں اور اسی صورت میں آٹھویں اور چوتھی شکلیں ایک دوسرے کا عکس ہیں جیسا کہ ان شکلوں کو اسطرح بیان کرنے سے صاف معلوم ہوگا

شکل ۴ — اگر دو ضلعے برابر ہیں / اور قاعدوں کے سامنے کے زاویے برابر ہیں } تو قاعدے برابر ہیں

شکل ۸ — اگر دو ضلعے برابر ہیں / اور قاعدے برابر ہیں } تو قاعدوں کے سامنے کے [illegible]

آٹھویں شکل کا دوسری قسم کا عکس یعنے "اگر ایک مثلث کے تین زاویے دوسرے مثلث کے

کے الگ الگ برابر ہوں تو برابر زاویوں کے سامنے کے ضلعے بھی آپسمیں برابر ہونگے" صحیح نہیں ہی

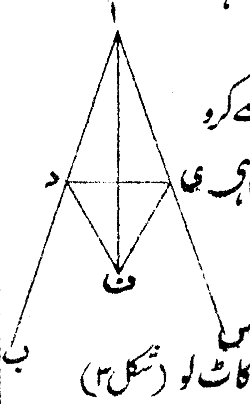
مشق

۱ اگر مثلث متساوی الساقین کے راس سے ایک خط قاعدہ کو دو برابر حصّوں میں کاٹتا ہوا کھینچا جاے تو وہ خط راس کے زاویہ کے بھی دو برابر حصے کریگا

۲ معین کے قطر جن زاویوں میں ہو کر گذرتے ہیں اُنکے دو برابر حصّے کرتے ہیں

۳ دو مثلث اس ب اور اد ب خط اب کے ایک ہی طرف واقع ہیں اور اُنکے ضلعے اس اور ب د برابر ہیں اور ضلعے اد اور ب س برابر ہیں اور اد اور ب س نقطہ ی پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ا ی ب مثلث متساوی الساقین ہی

شکل ۹ عملی



دیے ہوئے زاویہ مستقیم الخطین کے دو برابر حصّے کرو

فرض کرو کہ ب اس دیا ہوا زاویہ مستقیم الخطین ہی

اسکے دو برابر حصے کرنے ہیں

اب میں کوئی نقطہ د لو

اور بڑے خط اس میں سے ای برابر اد کے کاٹ لو (شکل ۳)

اور د ی ملاؤ — اصول موضوعہ ۱

د ی پر اسے دو مثلث متساوی الاضلاع د ف ی بناؤ — شکل ۱

اور اف ملاؤ — اصول موضوعہ ۱

تو خط اف زاویہ ب اس کے دو برابر حصّے کریگا

چونکہ ای برابر اد کے بنایا گیا ہی

اور اف دو مثلث د اف اور ی اف میں مشترک ہی

یعنے دو ضلعے د ا اور اف الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں ی ا اور اف کے

اور قاعدہ د ف قاعدہ ی ف کے برابر ہی — حد ۲۴

اسلئے زاویہ د ا ف برابر زاویہ ی ا ف کے ہی — شکل ۹

اسلئے دیے ہوے زاویہ مستقیم الخطین ب اس کے خط ا ف سے دو برابر حصّے ہوگئے اور اسی زاویہ کے دو برابر حصّے کرنے کی ضرورت تھی

اسے دو مثلث متساوی الاضلاع بنانے کی قید اسلئے کی گئی ہی کہ اگر ایسا نہ ہو اور مثلث متساوی الاضلاع دی کے اسطرف بنایا جاوے جس طرف مثلث د ا ی ہی تو ایک صورت میں ممکن ہوگا کہ نقطہ ف نقطہ ا پر پڑے اور اُس صورت میں خط ا ف نہ کھنچ سکیگا

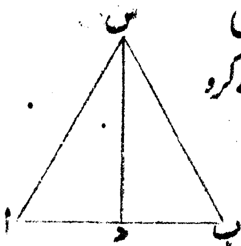
یہہ بھی یاد رکھنا چاہئے کہ نقطہ ف زاویہ ب اس کے اندر ہوگا کیونکہ ف کے زاویہ ب اس کے باہر ہونے یا خط ا ب یا اس پر ہونے سے یہہ نتیجہ نکلیگا کہ مثلث متساوی الاضلاع ب د ی کے قاعدہ د ی پر کا زاویہ ایک ہی حالت میں زاویہ ب د ی یا زاویہ س ی د سے چھوٹا ہوگا اور اُس سے بڑا یا اُسکے برابر ہوگا اور یہہ بات ناممکن ہی

اس شکل کے ذریعے سے ایک زاویہ کے چار اور آٹھ اور سولہ وغیرہ برابر حصّے ہوسکتے ہیں

مشق

نوین شکل کو بغیر آٹھوین شکل کی مدد کے ثابت کرو

شکل ۱۰ عملی



دیے ہوئے محدود خط مستقیم کے دو برابر حصّے کرو

فرض کرو کہ ا ب دیا ہوا محدود خط مستقیم ہی اُسکے دو برابر حصّے کرنے ہیں

ا ب پر مثلث متساوی اضلاع ا س ب بناؤ

اور زاویہ ا س ب کے خط س د سے جو ا ب کو نقطہ د پر کاٹے دو حصّے کرو

تو خط ا ب کے نقطہ د پر دو برابر حصے ہو جائیں گے

چونکہ اس برابر ہی ب س کے اور س د دو مثلث اس د اور ب س د میں مشترک ہی

یعنے دو ضلعے اس اور س د الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں ب س اور س د کے اور زاویہ اس د زاویہ ب س د کے برابر بنایا گیا ہی

اسلئے قاعدہ اد برابر ہی قاعدہ ب د کے

اسلئے خط ا ب کے نقطہ د پر دو برابر حصے ہو گئے

اور اسی خط کے دو برابر حصے کرنے کی ضرورت تھی

اس شکل کے ذریعہ سے ایک محدود خط مستقیم کے چار او آٹھ اور سولہ وغیرہ برابر حصے ہو سکتے ہیں

مشق

۱ ثابت کرو کہ اس شکل میں س د خط ا ب کے ساتھ زاویے قائمے بناتا ہی

۲ دیے ہوئے محدود خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ بڑھا ہوا حصہ اس خط کا جو دیے ہوئے خط اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنے تہائی ہو

شکل ۱۱ عملی

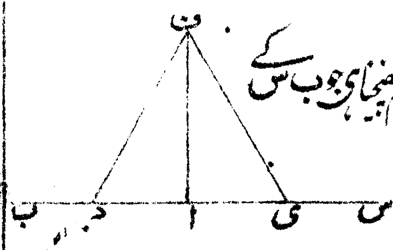
دیے ہوئے نقطے سے جو ایک دیے ہوئے خط مستقیم پر ہی ایک ایسا خط مستقیم کھینچو جو دیے ہوئے خط کے ساتھ زاویے قائمے بناوے

فرض کرو کہ ب س دیا ہوا خط مستقیم ہی اور

اسمیں ا دیا ہوا نقطہ ہی

نقطہ ا سے ایک ایسا خط مستقیم کھینچنا ہی جو ب س کے

ساتھ زاویے قائمے بناتا ہو



ب ا میں کوئی نقطہ د لے لو

اور ای برابر اد کے بناؤ — شکل ۳

ی عہ پر مثلث متساوی الاضلاع دف ی بناؤ — شکل ۱

اور ف ا ملاؤ — اصول موضوعہ

تو خط مستقیم اف جو نقطہ ا سے کھینچا گیا ہی خط ب س کے ساتھ نقطہ ا پر زاویے قائمے بناویگا

چونکہ ای برابر اد کے بنایا گیا ہی اور اف دو مثلث داف اور ی اف میں مشترک ہی

یعنی دو ضلعے د ا اور اف الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں ی ا اور اف کے

اور قاعدہ دف برابر قاعدہ ی ف کے — ص ۱۲

اسلئے زاویہ داف برابر زاویہ ی اف کے ہی — شکل ۸

اور یہ زاویے متصلہ ہیں

لیکن جب ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر کھڑا ہو کر ایسے زاویے متصلہ بناوے جو ایک دوسرے کے برابر ہوں تو ان زاویوں میں سے ہر ایک کو زاویہ قائمہ کہتے ہیں — ص ۱۰

اسلئے زاویوں داف اور ی اف میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ ہی

اسلئے دیئے ہوئے نقطہ ا سے جو دیئے ہوئے خط مستقیم ب س میں ہی

خط مستقیم اف جو ب س کے ساتھ زاویے قائمے بناتا ہی کھینچا

اور یہی خط کے کھینچنے کی ضرورت تھی

نتیجہ صریح — اس شکل کی مدد سے ثابت ہو سکتا ہی کہ دو خط مستقیم حصہ مشترک نہیں رکھتے اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ دو خط مستقیم اب س اور ا د اب حصہ مشترک رکھتے ہیں

نقطہ ب سے ایسا خط ب ی کھینچو جو اب کے ساتھ

زاویے قائمے بناتا ہو شکل "

چونکہ اب س خط مستقیم فرض کیا گیا ہے

اسلئے زاویہ س ب ی برابر زاویہ ی ب ا کے ہے

اور چونکہ اب د بھی خط مستقیم فرض کیا گیا ہے

اسلئے زاویہ د ب ی بھی برابر زاویہ ی ب ا کے ہے

اسلئے زاویہ د ب ی برابر زاویہ س ب ی کے ہے علوم متعارفہ ا

یعنے چھوٹا زاویہ برابر بڑے زاویہ کے ہے

اور یہہ ناممکن ہے علوم متعارفہ ۹

اسلئے دو خط مستقیم حصہ مشترک نہیں رکھتے - یہی ثابت کرنا تھا

یہہ نتیجہ صریح اقلیدس میں جو یونانی زبان میں لکھی ہوئی ہے نہیں ہے اسکو سمسن صاحب نے گیارہویں

شکل کے ساتھ لگایا ہے مگر اسپر بڑا بھاری اعتراض ہو سکتا ہے کیونکہ ہم نہیں جانتے کہ عمود ب ی کسطرح

کھینچا جائیگا اگر ہم اسکے کھینچنے کے لئے گیارہویں شکل کی مدد لیں تو ضرور ہے کہ ہم ب ا کو بڑھائیں

اور جب ہم ب ا کو بڑھائیں گے تو یہہ بات مان لینا فرض ہوگا کہ وہ صرف ایک طرح بڑھ سکتا ہے کیونکہ بغیر

اس بات کے مان لینے کے ہم نہیں جان سکتے کہ صرف ایک ہی عمود ب ی کھینچیگا اور جب ہم نے

اب کا صرف ایک ہی طرح بڑھنا مان لیا تو ہمنے اس دعوی کو جسے ہمکو ثابت کرنا چاہئے مان لیا

اگر سمسن صاحب کا نتیجہ صریح تیرہویں شکل کے بعد آوے تو وہ اسطرح ثابت ہو سکتا ہے اگر

ممکن ہو تو فرض کرو کہ دو خط مستقیم اب س اور اب د میں اب حصہ مشترک ہے نقطہ ب سے کوئی خط

ب ی کھینچو تو زاویہ اب ی اور ی ب س ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے (شکل ۱۳) اور زاویے

اب ی اور ی ب د بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہوںگے (شکل ۱۳) اسلئے زاویے اب ی اور ی ب س

برابر ہوںگے زاویوں اب ی اور ی ب د کے (علوم متعارفہ ا) اسلئے زاویہ ی ب س برابر زاویہ

ی ب د کے ہوگا (علوم متعارفہ ۳) یعنی کل اپنے ایک ٹکڑے کے برابر ہوگا اور یہہ ناممکن ہی (علوم متعارفہ ۹) اسلئے دو خط مستقیم حصہ مشترک نہیں رکھتے"

اگر سمسن صاحب کو اسکا خیال کرنا ہی تھا کہ دو خط مستقیم حصہ مشترک رکھتے ہیں یا نہیں تو انکو چاہئے تھا کہ اسے پہلے ہی خیال کرتے کیونکہ پانچویں شکل میں اگر دو خط مستقیم اب تک ایک ہی ہوں اور نقطہ ب سے جدا ہوں تو قاعدہ د ب س کے نیچے نقطہ ب پر دو چھوٹے بڑے زاویے پیدا ہونگے اور انمیں سے ہر ایک برابر زاویہ ب س ج کے ہوگا - لوگوں کی یہہ بھی رائے ہی کہ پہلی ہی شکل میں چپ چاپ مان لیا گیا ہی کہ خط ا س اور ب س نقطہ س پر جہاں وہ ملتے ہیں حصہ مشترک نہیں رکھتے

سمسن صاحب نے اس نتیجے کا بیان گیارہویں شکل سے پہلے کہیں نہیں کیا ہی اگر ہم اس نتیجہ صریح کو نکالکر دسویں علوم متعارفہ میں یہہ بات زیادہ کردیں کہ اگر ایک خط مستقیم کے کوئی دو نقطے دوسرے خط مستقیم کے دو نقطوں پر پڑیں تو دونوں خط مستقیم ایک دوسرے پر اُن نقطوں کے اندر اور باہر پڑینگے تو سب جھگڑے تمام ہوجائینگے

گیارہویں شکل نویں شکل کی ایک خاص صورت ہی دونوں شکلوں میں اف ایسا خط کھینچا گیا ہی جو ب ا اور س ا کے ساتھہ نقطہ ا پر برابر زاویے بناتا ہی نویں شکل میں خط ب ا اور س ا کے لئے کوئی قید نہیں ہی گیارہویں شکل میں یہہ قید ہی کہ ب ا اور س ا ایک ہی سیدھ میں ہوں

دو نقطوں کے درمیان دوری وہ خط مستقیم ہی جو اُن نقطوں کو ملاتا ہی اور ایک نقطہ کی ایک خط مستقیم سے دوری وہ چھوٹے سے چھوٹا خط مستقیم ہی جو اُس نقطے سے اُس خط تک کھینچا جائے

مشق

۱ دیئے ہوئے خط مستقیم میں ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اسکی دوری دو دیئے ہوئے نقطوں سے برابر ہو اور یہہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں نقطہ نہ دریافت ہوسکیگا

۲ دو نقطوں سے جو ایک دیئے ہوئے خط کے آمنے سامنے کی سمتوں میں ہیں ایسے وہ دیئے ہوئے خط پر ملیں اور اُنکے درمیان کے زاویے کے دیئے ہوئے خط سے دو برابر

بھی بیان کرو کہ کس حالت میں ان خطوں کا کھینچنا ناممکن ہوگا

۳ مثلث کے تینوں ضلعوں پر انکے بیچوں بیچ کے نقطوں سے جو خط ان ضلعوں کے ساتھ قائمہ زاویے قائمے بناتے ہوئے کھینچے جائیں گے وہ سب ایک ہی نقطہ پر ملیں گے

شکل ۱۲ اصلی

دیے ہوئے غیر محدود خط مستقیم پر دیے ہوئے نقطے سے جو خط مستقیم کے باہر ہی ایک عمود ڈالو

فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم ہی جسکو دونوں طرف جتنا چاہو بڑھا سکتے ہو اور

س دیا ہوا نقطہ اسکے باہر ہی

نقطہ س سے خط مستقیم اب پر ایک عمود ڈالنا ہی

اب کے دوسری طرف میں کوئی نقطہ د لے لو

اور س مرکز سے س د دوری پر دائرہ ی ج ف کھینچو جو اب سے ف اور ج پر ملے — اصول موضوعہ

ف ج کے نقطہ ہ پر دو برابر حصے کرو — شکل ۱۰

اور س ہ ملاؤ — اصول موضوعہ

تو س ہ جو نقطہ س سے کھینچا گیا ہی دیے ہوئے خط اب پر عمود ہوگا

س ف اور س ج ملاؤ — اصول موضوعہ

چونکہ ف ہ برابر ہ ج کے بنایا گیا ہی اور ہ س دو مثلث ف ہ س اور

ج ہ س میں مشترک ہی

یعنی دو ضلعے ف ہ اور ہ س دو ضلعوں ج ہ اور ہ س کے الگ الگ برابر ہیں

اور قاعدہ س ف برابر قاعدہ س ج کے ہی — حد ۱۵

اسلیے زاویہ ف ہ س برابر زاویہ ج ہ س کے ہی — شکل ۸

اور یہ زاویے متصلہ ہیں

لیکن جب ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر کھڑا ہو کر زاویے متصلہ برابر بناوے

تو ان زاویوں میں سے ہر ایک کو زاویہ قائمہ کہتے ہیں اور کھڑے خط مستقیم کو دوسرے خط مستقیم پر عمود — اسلئے س ہ خط اب پر عمود ہے

اسلئے نقطہ س سے جو دیے ہوئے خط مستقیم اب کے باہر ہے عمود س ہ خط اب پر کھینچا گیا اور اسی عمود کے کھینچنے کی ضرورت تھی

اس شکل میں اس بات کو مان لیا ہے کہ دائرہ خط اب کو دو نقطوں پر کاٹے گا کیونکہ جب ہم خیال کرتے ہیں کہ دائرہ کے محیط کا ایک ایک حصہ اب کے دونوں طرف ہے اور محیط ایک قسم کا لگاتار خط ہے تو یہ ظاہراً معلوم ہوتی ہے کہ محیط دو مرتبہ خط مستقیم اب کو کاٹتا ہوا گذر جائیگا دیے ہوئے خط میں غیر محدود ہونیکی قید لگائی گئی ہے کیونکہ اگر یہ قید نہ ہوتی تو یہ ممکن تھا کہ خاص حالتوں میں دائرہ خط اب کو کسی جگہ پر نہ کاٹتا یا صرف ایک ہی جگہ پر کاٹتا

اقلیدس نے خط زاویے قائمے بناتے ہوئے اور خط عمود میں یہ فرق رکھا ہے کہ جب خط کسی دوسرے خط کے ایک نقطے سے کھینچا گیا ہو جیسی شکل کے مطابق کھینچا گیا ہے اسکو اقلیدس نے زاویے قائمے بناتا ہوا خط کہا ہے اور جب خط کسی نقطے سے جو دوسرے خط کے باہر ہے جیسی شکل کے مطابق اس خط پر ڈالا گیا ہے اسکو اقلیدس نے عمود کہا ہے لیکن زمانہ حال کے لکھنے والے اس فرق کا کچھ خیال نہیں کرتے اور ایک کو دوسرے کی جگہ استعمال کرتے ہیں

مشق

اگر کسی مثلث کی راس سے قاعدہ پر عمود ڈالا جاوے اور وہ عمود اس قاعدہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرے تو وہ مثلث متساوی الساقین ہوگا

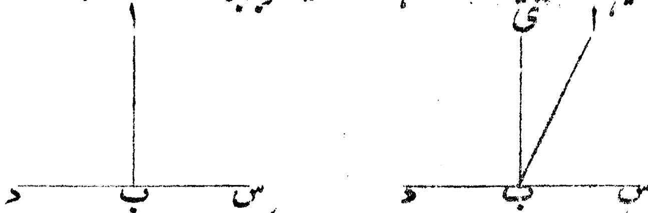
شکل ۱۳ اثباتی

جو زاویے ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے ساتھ اسکے ایک طرف بناتا ہے وہ یا تو دو قائمے ہوتے ہیں یا دونوں ملکر برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں

فرض کرو کہ خط مستقیم اب خط مستقیم س د کے ساتھ اسکے ایک طرف

س ب اور اب د بناتا ہی

تو یہہ زاویے یا تو دو قائمے ہوں گے یا ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے



کیونکہ اگر زاویہ س ب ا برابر زاویہ اب د کے ہی

تو ہر ایک اُنمیں سے زاویہ قائمہ ہی — حد ۱

اگر زاویہ س ب ا برابر زاویہ اب د کے نہیں ہی

نقطہ ب سے س د کے ساتھہ زاویے قائمے بناتا ہوا خط ب ی کھینچو — شکل ۱۱

تو زاویے س ب ی اور ی ب د دو قائمے ہیں

چونکہ زاویہ س ب ی برابر دو زاویوں س ب ا اور اب ی کے ہی

اِن دونوں برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ی ب د ملاؤ

اسلئے زاویہ س ب ی اور ی ب د برابر ہیں تین زاویوں س ب ا اور

اب ی اور ی ب د کے — علوم متعارفہ ۲

پھر چونکہ زاویہ د ب ا برابر زاویوں د ب ی اور ی ب ا کے ہی

اور اِن دونوں برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ اب س ملاؤ

اسلئے زاویے د ب ا اور اب س برابر ہیں تین زاویوں د ب ی اور ی ب ا

اور اب س کے — علوم متعارفہ ۲

لیکن ثابت ہو چکا ہی کہ زاویے س ب ی اور ی ب د بھی انہیں تین

زاویوں کے برابر ہیں

اور جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوتی ہیں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں — علوم متعارفہ ۱

اسلئے زاویے س ب ی اور ی ب د ملکر برابر زاویوں د ب ا اور ا ب س کے ہیں

لیکن زاویے س ب ی اور ی ب د دو قائمے ہیں

اسلئے زاویے د ب ا اور ا ب س ملکر برابر دو قائموں کے ہیں علوم متعارفہ

اسلئے جو زاویے ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے ساتھ الخ - یہی ثابت کرنا تھا

تتمہ صریح ا سب زاویے جو کوئی خط مستقیم کسی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر اسکے ایک طرف بناتے ہیں ملکر برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں

تیرہویں شکل کے دعوے میں اس عبارت کا کہ اسکے ساتھ زاویے بناتا ہے ہونا ضروری ہے کیونکہ اگر یہہ عبارت نہو تو شکل کی ایک یہہ بھی صورت ہوگی کہ ایک خط دوسرے خط کے سرے پر کھڑا ہو اور اس صورت میں صرف ایک زاویہ بنے گا

اگر دو زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہوں تو انمیں سے ہر ایک کو دوسرے کا تتمہ کہتے ہیں اور اگر دو زاویے ملکر ایک قائمہ کے برابر ہوں تو انمیں سے ہر ایک دوسرے کا تمامی قائمہ ہے

مشق

اگر زاویہ ب ا س کی ساق ب ا راس کی طرف د تک بڑھائی جائے اور خط ا ی اور ا ف زاویوں ب ا س اور س ا د کے دو دو برابر حصے کریں تو ثابت کرو کہ زاویہ ی ا ف قائمہ ہے

شکل ۱۴ اثباتی

اگر کسی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر دو اور خط مستقیم اسکے آمنے سامنے کی طرف سے آکر زاویے متصلہ برابر دو قائموں کے بناویں تو یہہ دونوں خط مستقیم ایک خط مستقیم میں ہوں گے

فرض کرو کہ خط مستقیم ا ب کے ب نقطہ پر دو خط مستقیم س ب ا ب

خط اب کی آمنے سامنے کی طرفوں سے آنکر زاویے متصلہ س ب ا اور ا ب د برابر دو قائموں کے بناتے ہیں

تو س ب اور د ب ایک ہی خط مستقیم میں ہوں گے

اگر د ب اور ب س ایک ہی خط مستقیم میں نہوں

ی

س ب د

تو فرض کرو کہ ی ب اور ب س ایک ہی خط مستقیم میں ہے

چونکہ خط اب خط س ب ی سے نقطہ ب پر ملتا ہے

اسلئے زاویے متصلہ س ب ا اور ا ب ی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۱۳

لیکن زاویے س ب ا اور ا ب د بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — فرض

اسلئے زاویے س ب ا اور ا ب د برابر زاویوں س ب ا و ا ب ی کے ہیں — علوم متعارفہ اول

ان برابروں میں سے زاویہ س ب ا نکال ڈالو

اسلئے باقی زاویہ ا ب د برابر ہی باقی زاویہ ا ب ی کے — علوم متعارفہ ۳

یعنے کل اپنے ایک ٹکڑے کے برابر ہوا اور یہہ نا ممکن ہے — علوم متعارفہ ۹

اسلئے ی ب اور ب س ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں

اور اسیطرح ثابت ہو سکتا ہے کہ سوا ب د کے کوئی اور خط مستقیم س ب کے ساتھ ملکر ایک خط مستقیم نہیں ہو سکتا

اسلئے ب د ہی ب س کے ساتھ ملکر ایک خط مستقیم ہوا

اسلئے کسی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر الخ — یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل تیرہویں شکل کا عکس ہے اور اسکو ثبوت بہ خلف سے ثابت کیا ہے اس شکل میں خط س ب اور د ب کے خط اب کی آمنے سامنے کی طرفوں سے آنکر ملنے کی قید ضروری ہے اگر یہہ قید نہو تو یہہ ممکن ہے کہ جو زاویے دو خط مستقیم کسی مستقیم خط کے ساتھ بنا دیں وہ دو قائموں کے برابر ہوں لیکن دونوں خط ایک ہی خط مستقیم میں نہوں

طالب علم کو غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ زاویے س ب ا اور ا ب ی کو زاویوں س ا ب اور ا ب د کے برابر ثابت کرنے میں پہلے اور گیارہویں علوم متعارفہ دونوں کا حکم لگانا ضرور ہے

ماڈہنٹر صاحب نے گیارہویں علوم متعارفہ کو اسطرح ثابت کیا ہے اور اس ثبوت پر اقلیدس کے اصول کی رو سے کوئی اعتراض نہیں ہو سکتا ہے فرض کرو کہ خط ا ب خط س ا د کے ساتھ نقطہ ا پر زاویے قائمے بناتا ہے اور خط ی ف خط ج ی ہ کے ساتھ نقطہ ی پر زاویے قائمے بناتا ہے زاویے ب ا س اور ف ی ج آپسمیں برابر ہوں گے

ب ك ف د س ہ ی ج

کوئی لمبائی ا س لے لو اور ا د اور ی ہ اور ی ج ان سب کو اس کے برابر بناؤ۔ خط ہ ی ج کو خط د ا س پر اسطرح رکھو کہ نقطہ ہ نقطہ د پر ہو اور خط ہ ج کی طرف خط د س کی طرف پہو اور نقطے ب اور ف خط د س کے ایک ہی سمت میں ہوں تو نقطہ ج نقطہ س پر پڑیگا اور نقطہ ی نقطہ ا پر اور ی ف بھی ا ب پر پڑیگا اگر خط ی ف خط ا ب پر نہ پڑے مگر کسی اور جگہہ پر ا ك کے طرح واقع ہو تو زاویہ ہ ی ف برابر زاویہ د ا ك کے ہوگا اور زاویہ ف ی ج برابر زاویہ ك ا س کے لیکن زاویے ہ ی ف اور ف ی ج بموجب فرض کے آپسمیں برابر ہیں اسلئے زاویے د ا ك اور ك ا س آپسمیں برابر ہیں لیکن زاویے د ا ب اور ب ا س بھی بموجب فرض کے آپسمیں برابر ہیں اور زاویہ س ا ب زاویہ س ا ك سے بڑا ہے اسلئے زاویہ د ا ب زاویہ س ا ك سے بڑا ہے اور اسلئے زاویہ د ا ك زاویہ س ا ك سے اور بھی زیادہ بڑا ہے لیکن یہہ ثابت ہو چکا ہے کہ زاویہ د ا ك زاویہ س ا ك کے برابر ہے اسلئے زاویہ د ا ك زاویہ س ا ك کے برابر اور اس سے بڑا بھی ہے اور یہہ نا ممکن بات ہے اسلئے خط ی ف خط ا ب پر پڑتا ہے اور اسلئے زاویے ف ی ج اور ب ا س ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیتے ہیں اور اسلئے آپسمیں برابر ہیں

شکل ۱۵ اثباتی

اگر دو خط مستقیم آپسمیں ایک دوسرے کو کاٹیں تو زاویے متقابلہ بہم برابر ہوں گے

فرض کرو کہ دو خط مستقیم اب اور س د ایک دوسرے کو نقطہ ی پر کاٹتے ہیں

تو زاویہ ای س برابر ہوگا زاویہ د ی ب کے

اور زاویہ ای د برابر ہوگا زاویہ س ی ب کے

چونکہ خط ای خط س د کے ساتھ نقطہ ی پر زاویے متصلہ س ی ا اور ای د بناتا ہے

یہہ دونوں زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۱۳

پھر چونکہ خط د ی خط اب کے ساتھ نقطہ ی پر زاویے متصلہ ب ی د اور د ی ا بناتا ہے

یہہ دونوں زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۱۳

لیکن ثابت ہوچکا ہے کہ زاویے س ی ا اور ای د برابر دو قائموں کے ہیں

اسلیے زاویے س ی ا اور ای د برابر ہیں زاویوں ب ی د اور ای د کے

ان برابروں میں سے زاویہ ای د نکال ڈالو

اسلیے باقی زاویہ س ی ا برابر ہے باقی زاویہ ب ی د کے — علوم متعارفہ ۳

اور اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویہ س ی ب برابر ہے زاویہ ای د کے

اسلیے اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو کسی نقطہ پر کاٹیں الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل زاویہ کی تعریف سے بھی ظاہر ہے کیونکہ اگر زاویہ کی ساقیں راس کی طرف بڑھائی جاویں تو بڑھے ہوئے حصوں کا جھکاؤ ایک دوسرے کی طرف وہی ہے جو ساقوں کا ایک دوسرے کی طرف ہے

نتیجہ صریح ۱ اس شکل سے ظاہر ہے کہ اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو کسی نقطہ پر کاٹیں تو اس نقطہ پر کے چاروں زاویے ملکر برابر چار قائموں کے ہوں گے

نتیجہ صریح ۲ اور اس لیے سب زاویے جو کئی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر ملنے سے بنیں گے ملکر برابر چار قائموں کے ہوں گے

اقلیدس نے اس شکل کے عکس یعنی اس شکل کو کہ اگر چار خط مستقیم ایک نقطہ پر ملکر چار زاویے ایسے بناویں کہ آپس میں سے آمنے سامنے کے دو دو زاویے آپسمیں برابر ہوں تو ان خطوں میں سے دو دو خط ایک ایک خط مستقیم میں ہوں گے" نہیں ثابت کیا ہے وہ اسطرح ثابت ہو سکتی ہے

فرض کرو کہ چار خط ای اور س ی اور ب ی اور د ی نقطہ ی پر ملکر ایسے چار زاویے بناتے ہیں کہ انمیں سے آمنے سامنے کے دو دو زاویے برابر ہیں یعنی زاویے ا ی س اور ب ی د آپسمیں برابر ہیں اور زاویے س ی ب اور ا ی د آپسمیں برابر ہیں تو خط ا ی اور ب ی ایک خط مستقیم میں ہوں گے اور س ی اور ی د ایک خط مستقیم میں ہوں گے

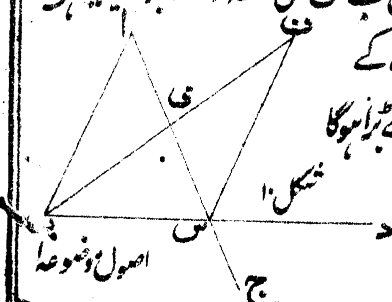
چونکہ زاویہ ا ی س برابر ہے زاویہ ب ی د کے اور زاویہ س ی ب برابر ہے زاویہ ا ی د کے اسلئے زاویے ا ی س اور س ی ب ملکر برابر زاویوں ب ی د اور د ی ا کے ہیں (علوم متعارفہ ۲) لیکن یہہ چاروں زاویے ملکر برابر چار قائموں کے ہیں (شکل ۱۵ کا نتیجہ صریح ۲) اسلئے زاویے ا ی س اور س ی ب ملکر برابر دو قائموں کے ہیں اور اسلئے ا ی اور ب ی ایک ہی خط مستقیم میں ہیں (شکل ۱۴) اور اسیطرح یہہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ س ی اور ی د ایک ہی خط مستقیم میں ہیں

شکل ۱۶ اثباتی

اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جاوے تو زاویہ خارجہ اپنے سامنے کے ہر ایک زاویہ داخلہ سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ مثلث ا ب س کا ضلع ب س کسی نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے تو زاویہ خارجہ ا س د اپنے سامنے کے ہر ایک زاویہ داخلہ س ا ب اور ا ب س سے بڑا ہوگا

ا س کے ی پر دو برابر حصے کرو اور ب ی ملاؤ



ب ی کو کسی نقطہ ف تک بڑھاؤ

اور ی ف برابر ب ی کے کاٹ لو — اصول موضوعہ ۳ شکل ۳

اور س ف ملاؤ — اصول موضوعہ ۱

چونکہ ی س برابر ا ی کے اور ی ف برابر ب ی کے بنایا گیا ہے

یعنے دو مثلث ا ب ی اور س ف ی میں دو ضلعے ا ی اور ی ب دو ضلعوں

س ی اور ی ف کے الگ الگ برابر ہیں

اور زاویہ ا ی ب زاویہ س ی ف کے برابر ہے

اسلئے قاعدہ اب قاعدہ س ف کے برابر ہے اور مثلث ا ب ی برابر ہے مثلث

س ف ی کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں باقی زاویوں

دوسرے مثلث کے یعنی وہ زاویے آپس میں برابر ہیں جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں — شکل ۴

اسلئے زاویے ب ا ی برابر ہے زاویہ ف س ی کے

لیکن زاویہ ا س د زاویہ ف س ی سے بڑا ہے — علوم متعارفہ ۹

اسلئے زاویہ ا س د زاویہ ب ا س سے بڑا ہے

اسیطرح اگر ا س نقطہ ج تک بڑھایا جائے اور ب س کے دو برابر حصے کئے

جائیں یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویہ ب س ج زاویہ ا ب س سے بڑا ہے

لیکن زاویہ ب س ج زاویہ ا س د کے برابر ہے — شکل ۱۵

اسلئے زاویہ ا س د زاویہ ا ب س سے بڑا ہے

اسلئے اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو زاویہ خارجہ الخ — یہی ثابت کرنا تھا

مشق

۱ کسی خط مستقیم پر ایک نقطے سے ایک سے زیادہ عمود نہیں گرا سکتے ہیں

۲ اگر کسی نقطے سے ایک خط مستقیم جو ایک دیے ہوئے خط مستقیم کے ساتھ ایک زاویہ منفرجہ اور

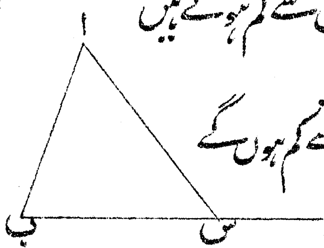
ایک زاویہ حادہ بنا وے کھینچا جائے اور اسی نقطے سے اُس دیے ہوئے خط پر ایک عمود گرایا جائے

تو ثابت کرو کہ عمود زاویہ حادہ کی طرف گریگا

۳ ایک نقطے سے کسی خط مستقیم تک دو سے زیادہ برابر خط نہیں کھینچ سکتے ہیں

شکل ۱۷ اثباتی

مثلث کے ہر دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہوتے ہیں



فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہے

تو اُسکے ہر دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہونگے

کسی ضلع ب س کو د تک بڑھاؤ

چونکہ اس د مثلث اب س کا زاویہ خارجہ ہے

اسلئے زاویہ اس د اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ اب س سے بڑا ہے شکل ۱۶

ان دونوں نابرابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ اس ب زیادہ کرو

اسلئے زاویے اس د اور اس ب ملکر زاویوں اب س اور اس ب

سے بڑے ہیں علوم متعارفہ ۴

لیکن زاویے اس د اور اس ب ملکر برابر دو قائموں کے ہیں شکل ۱۳

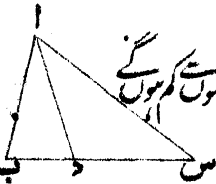
اسلئے زاویے اب س اور اس ب ملکر دو قائموں سے کم ہیں

اسی طرح یہہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویے ب اس اور اس ب ملکر دو

قائموں سے کم ہیں اور زاویے ب اس اور اب س بھی ملکر دو قائموں سے کم ہیں

اسلئے مثلث کے ہر دو زاویے الخ — یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کو اسطرح بھی ثابت کرتے ہیں



فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہے اُسکے ہر دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہونگے

ضلع ب س میں کوئی نقطہ د لو اور اد ملاؤ

چونکہ زاویہ ادس زاویہ اب س سے اور زاویہ ادب زاویہ اس ب سے بڑا ہی
اسلئے زاویے ادب اور ادس ملکر زاویوں اس ب اور اب س سے بڑے ہیں
لیکن زاویے ادب اور ادس ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۱۳
اسلئے زاویے اس ب اور اب س ملکر دو قائموں سے کم ہیں
اسی طرح یہہ بھی ثابت ہو سکتا ہی کہ زاویے ب اس اور اس ب ملکر دو قائموں سے کم ہیں
اور زاویے ب اس اور اب س بھی دو قائموں سے کم ہیں
یہہ شکل بارہویں علوم متعارفہ کا عکس ہی یہہ شکل اور سولہویں شکل دونوں مقالہ کی بتیسویں شکل میں شامل ہیں

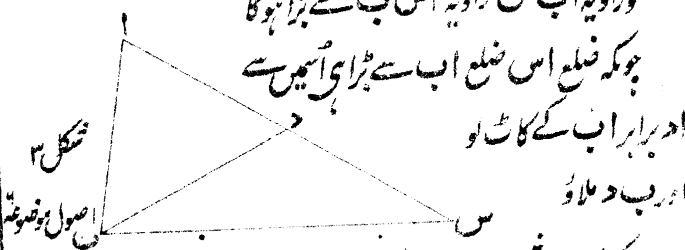
مشق

۱ مثلث کے تینوں زاویے داخلے ملکر تین قائموں سے کم ہوتے ہیں
۲ مثلث کے دو زاویے خارجے ملکر دو قائموں سے اور تین زاویے خارجے ملکر تین قائموں سے زیادہ ہوتے ہیں

شکل ۱۸ اثباتی

ہر مثلث میں بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ بڑا ہوتا ہی

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہی اور اسکا ضلع اس ضلع اب سے بڑا ہی
تو زاویہ اب س زاویہ اس ب سے بڑا ہوگا
چونکہ ضلع اس ضلع اب سے بڑا ہی اسمیں سے
اد برابر اب کے کاٹ لو
اور ب د ملاؤ



چونکہ ادب مثلث دب س کا زاویہ خارجہ ہی
اسلئے زاویہ ادب اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ب س د سے بڑا ہی — شکل ۱۶
لیکن زاویہ ادب برابر ہی زاویہ اب د کے کیونکہ اب برابر ہی اد کے — شکل ۵

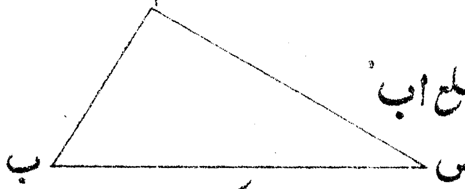
اِسلئے زاویہ اب د بڑا ہی زاویہ ب س ا سے
اسلئے زاویہ اب س اور زیادہ بڑا ہی زاویہ ب س ا سے
اسلئے مثلث کے بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ الخ - یہی ثابت کرنا تھا
نتیجہ صریح مثلث مختلف الاضلاع کے زاویے نابرابر ہوتے ہیں

مشق

ذوار بعۃ الاضلاع اب س د کا ضلع اد سب ضلعوں سے بڑا ہی اور ضلع ب س سب ضلعوں سے چھوٹا ہی ثابت کرو کہ زاویہ اب س زاویہ اد س سے اور زاویہ ب س د زاویہ ب ا د سے بڑا ہی

شکل ۱۹ اثباتی

ہر مثلث میں بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہی
فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہی اور اُسکا زاویہ اب س زاویہ اس ب سے بڑا ہی
تو ضلع اس ضلع اب سے بڑا ہوگا



اگر ضلع اس ضلع اب سے بڑا نہیں ہی تو وہ اُسکے برابر ہی یا اُس سے چھوٹا ہی
اگر اس برابر ہی اب کے تو زاویہ اب س بھی برابر ہی زاویہ اس ب کے (شکل ۵)
لیکن یہہ زاویے آپسمیں برابر نہیں ہیں (فرض)
اسلئے اس بھی برابر نہیں ہی اب کے
اگر اس چھوٹا ہی اب سے تو زاویہ اب س بھی چھوٹا ہی زاویہ اس ب سے (شکل ۱۸)
لیکن زاویہ اب س زاویہ اس ب سے چھوٹا نہیں ہی (فرض)
اسلئے اس بھی چھوٹا نہیں ہی اب سے

اور یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ اس برابر بھی نہیں ہی اب کے

اسلیئے اس بڑا ہی اب سے

اسلیئے ہر مثلث میں بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل اٹھارہویں شکل کا عکس ہی اور چھٹی شکل کے ساتھہ وہی علاقہ رکھتی ہی جو اٹھارہویں شکل پانچویں

شکل کے ساتھہ رکھتی ہی یہہ علاقہ ان شکلوں میں سے دو دو کو ملا کر اسطرح بیان کرنے سے معلوم ہوگا

مثلث کا ایک زاویہ اُسکے دوسرے زاویہ کے برابر (شکل ۵) یا اُس سے بڑا یا چھوٹا (شکل ۱۸) ہوگا

جیسا کہ پہلے زاویہ کے سامنے کا ضلع دوسرے زاویہ کے سامنے کے ضلع کے برابر یا اُس سے بڑا یا

چھوٹا ہو اور مثلث کا ایک ضلع اُسکے دوسرے ضلع کے برابر (شکل ۶) یا اُس سے بڑا یا چھوٹا (شکل ۱۹) ہوگا

جیسا کہ پہلے ضلع کے سامنے کا زاویہ دوسرے ضلع کے سامنے کے زاویہ کے برابر یا اُس سے بڑا یا چھوٹا ہو

ان چار شکلوں کے آپسکے علاقہ کو ہم اسطرح پر بھی بیان کر کے ظاہر کرتے ہیں

شکل ۵ —	اگر ضلع اب = ضلع اس	تو	زاویہ س = زاویہ ب
شکل ۶ —	اگر زاویہ س = زاویہ ب	تو	ضلع اب = ضلع اس
شکل ۱۸ —	اگر ضلع اب > ضلع اس	تو	زاویہ س > زاویہ ب
شکل ۱۹ —	اگر زاویہ س > زاویہ ب	تو	ضلع اب > ضلع اس

مشق

۱ خط اد مثلث اب س کے زاویہ ا کے دو برابر حصے کرتا ہی اور اُسکے ضلع ب س سے نقطہ د پر ملتا ہی ثابت کرو کہ ب ا بڑا ہی ب د سے اور س ا بڑا ہی س د سے

۲ اگر مربع کے کسی زاویہ ا سے ایک خط اُس زاویہ کے سامنے کے ضلعوں میں سے ایک کو کاٹتا ہوا اور دوسرے ضلع کے بڑھے ہوئے حصہ سے نقطہ ف پر ملتا ہوا کھینچا جائے تو اف اُس مربع کے قطر سے بڑا ہوگا

۳ جتنے خط مستقیم کسی نقطہ سے ایک دیے ہوئے خط مستقیم تک کھینچے جائیں اُنمیں سے عمود سب سے چھوٹا ہوگا اور جو خط عمود کے نزدیک ہوگا وہ دور کے خط سے چھوٹا ہوگا

شکل ۲۰ اثباتی

مثلث کے ہر دو ضلعے ملکر تیسرے سے بڑے ہوتے ہیں

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہی

تو اسکے ہر دو ضلعے ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہونگے

یعنی ب ا اور اس ملکر ب س سے اور اب اور ب س

ملکر اس سے اور ب س اور س ا ملکر اب سے بڑے ہونگے

ب ا کو کسی نقطہ د تک بڑھاؤ — اصول موضوعہ ۲

ا د برابر اس کے بناؤ — شکل ۳

اور د س ملاؤ — اصول موضوعہ ۱

چونکہ ا د برابر اس کے بنا ہی

اسلئے زاویہ ا س د برابر ہی زاویہ ا د س کے — شکل ۵

لیکن زاویہ ب س د زاویہ ا س د سے بڑا ہی — علوم متعارفہ ۹

اسلئے زاویہ ب س د زاویہ ا د س سے بھی بڑا ہی

چونکہ مثلث د ب س میں زاویہ ب س د بڑا ہی زاویہ ب د س سے اور

بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہی — شکل ۱۹

اسلئے ب د بڑا ہی ب س سے

لیکن ب د برابر ہی ب ا اور اس کے کیونکہ ا د برابر ہی اس کے

اسلئے ب ا اور اس ملکر بڑے ہیں ب س سے

اسیطرح یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہی کہ اب اور ب س ملکر اس سے

اور ب س اور س ا ملکر اب سے بڑے ہیں

∴ اسلئے مثلث کے ہر دو ضلعے الخ ـ یہی ثابت کرنا تھا

یاد رکھو کہ جن دو ضلعوں کو تیسرے ضلع سے بڑا ثابت کرنا چاہتے ہو اُن دو ضلعوں میں سے کسی ایک ضلع کو اُس طرف بڑھانے سے جدھر وہ دونوں ضلعے ملتے ہوں اور بڑھے ہوئے حصہ کو دوسرے ضلع کی برابر بنانے سے یہہ شکل ثابت ہوگی

یہہ شکل اسطرح بھی ثابت ہوسکتی ہی فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہی تو اُسکے کوئی سے دو ضلعے اب اور اس ملکر تیسرے ضلع ب س سے بڑے ہوں گے

ب س

اگر اب اور اس میں سے کوئی ایک ب س کے برابر یا اُس سے بڑا ہی تو صاف ظاہر ہی کہ اب اور اس ملکر ب س سے اور بھی زیادہ بڑے ہوں گے اگر اب اور اس میں سے کوئی ب س سے بڑا نہیں ہی تو ب س میں سے ب د برابر ب ا کے کاٹ لو اور اد ملاؤ چونکہ ادس مثلث اب د کا زاویہ خارجہ ہی اسلئے زاویہ ادس بڑا ہی زاویہ ب اد سے (شکل ۱۶) لیکن زاویہ ب اد برابر ہی زاویہ ادب کے (شکل ۵) اسلئے زاویہ ادس بڑا ہی زاویہ ادب سے لیکن زاویہ ادب مثلث ادس کا زاویہ خارجہ ہی اور بڑا ہی زاویہ د اس سے (شکل ۱۶) اسلئے زاویہ ادس اور بھی زیادہ بڑا ہی زاویہ د اس سے اور چونکہ بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہی (شکل ۱۹) اسلئے اس بڑا ہی س د سے اد جو برابر ب ا کے بنایا گیا ہی اسلئے ب ا اور اس ملکر بڑے ہیں ب د اور د س سے یعنی ب س سے یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کا یہہ نتیجہ صریح ہوسکتا ہی کہ دو نقطوں کے درمیان خط مستقیم سب سے چھوٹی دوری ہی کیونکہ نقطہ ا خط ب س سے کیسا ہی نزدیک کیوں نہو ب س ہمیشہ ب ا اور اس سے چھوٹا ہی ہوتا ہی

مشق

۱ مثلث کے دو ضلعوں میں فرق تیسرے ضلع سے چھوٹا ہوتا ہی

۲ مثلث کے تینوں ضلعے ملکر کسی ایک ضلع کے دونے سے بڑے ہوتے ہیں

۳ اگر کسی نقطہ سے کسی مثلث کے تینوں زاویوں تک تین خط مستقیم کھینچے جائیں تو یہہ تینوں خط ملکر مثلث کے تینوں ضلعوں کے آدھے سے بڑے ہوں گے

۴ ذوارلبعۃ الاضلاع کے چاروں ضلعے ملکر اُسکے دونوں قطروں سے بڑے ہوتے ہیں

۵ مثلث کے دو ضلعے ملکر اُس خط مستقیم کے جو تیسرے ضلع کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے اُس ضلع کے سامنے کے زاویہ تک کھینچا جائے دونے سے بڑے ہوں گے

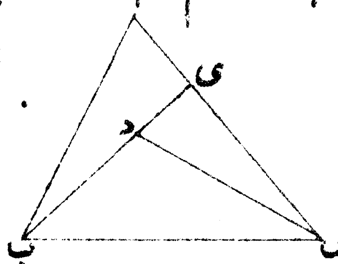
۶ اگر کسی نقطے سے کسی ذوارلبعۃ الاضلاع کے چاروں زاویوں تک چار خط مستقیم کھینچے جائیں تو وہ چاروں خط ملکر ذوارلبعۃ الاضلاع کے چاروں ضلعوں کے آدھے سے بڑے ہوں گے

۷ دیے ہوئے خط مستقیم میں ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اُسکی دوریاں دو نقطوں سے جو دیے ہوئے خط کے ایک ہی سمت میں ہیں ملکر اُس خط کے اور نقطوں میں سے ہر ایک کی دوریوں سے کم ہوں

شکل ۲۱ اثباتی

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے سروں سے دو خط مستقیم ایک نقطہ تک جو اُس مثلث کے اندر ہی کھینچے جائیں تو یہہ دونوں خط مستقیم ملکر مثلث کے باقی ضلعوں سے چھوٹے ہوں گے لیکن اُن خطوں کے درمیان کا زاویہ اُن ضلعوں کے درمیان کے زاویہ سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث ہی اور اُسکے ضلع ب س کے سروں ب اور س سے نقطہ د تک جو مثلث کے اندر ہی خط مستقیم ب د اور س د کھینچے گئے ہیں



تو ب د اور د س ملکر مثلث کے دو ضلعوں ب ا اور ا س سے چھوٹے ہونگے لیکن اُنکے درمیان کا زاویہ ب د س مثلث کے زاویہ ب ا س سے بڑا ہوگا

ب د کو بڑھاؤ کہ وہ ا س سے نقطہ ی پر ملے

چونکہ مثلث کے دو ضلعے ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہوتے ہیں شکل ۲۰

اسلئے مثلث ا ب ی کے دو ضلعے ب ا اور ا ی بڑے ہیں ضلع ب ی سے

ان نابرابروں میں سے ہرایک میں ی س زیادہ کرو

تو ب ا اور ا س ملکر بڑے ہوئے ب ی اور ی س سے — علوم متعارفہ ۴

اور چونکہ مثلث س ی د کے دو ضلعے س ی اور ی د بڑے ہیں ضلع

س د سے — شکل ۲۰

اور ان نابرابروں میں سے ہرایک میں د ب زیادہ کرو

تو س ی اور ی ب ملکر بڑے ہوئے س د اور د ب سے — علوم متعارفہ ۴

لیکن یہہ ثابت ہوچکا ہی کہ ب ا اور ا س ملکر بڑے ہیں س ی اور ی ب سے

اسلئے ب ا اور ا س اور بھی زیادہ بڑے ہیں ب د اور د س سے

پھر چونکہ مثلث کا زاویہ خارجہ اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ سے بڑا ہوتا ہی — شکل ۱۶

اسلئے مثلث س د ی کا زاویہ خارجہ ب د س بڑا ہی زاویہ داخلہ س ی د سے

اسی دلیل سے مثلث ا ب ی کا زاویہ خارجہ س ی د بڑا ہی زاویہ داخلہ

ب ا س سے

اسلئے زاویہ ب د س اور بھی زیادہ بڑا ہی زاویہ ب ا س سے

اسواسطے اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے سروں سے الخ — یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل میں اگر مثلث کے ضلع کے سروں سے خط مستقیم کھینچے جانے کی قید نہو تو یہہ ممکن ہوسکتا ہی کہ دو خط مستقیم جو اس ضلع کے کسی اور دو نقطوں سے کھینچے جائیں مثلث کے باقی دو ضلعوں سے بڑے یا انکے برابر ہوں لیکن دونوں خط ملکر ان ضلعوں کے ہونے سے ہمیشہ کم ہیں گے اگر ضلع جسکے سروں سے خط مستقیم کھینچے جائیں مثلث متساوی الاضلاع کا ضلع ہو یا ایسے مثلث متساوی الساقین کا قاعدہ ہو کہ اسکی ہر ساق قاعدہ سے بڑی ہو تو ضلع کے سروں سے خط مستقیم کھینچے جانے کی قید کی کچھ ضرورت نہیں یہی دونوں خط مستقیم ملکر خواہ وہ ضلع کے سروں سے یا اس ضلع کے کسی اور دو نقطوں سے کھینچے گئے ہوں مثلث متساوی الاضلاع کے باقی ضلعوں یا مثلث متساوی الساقین کی ساقوں سے چھوٹے ہونگے

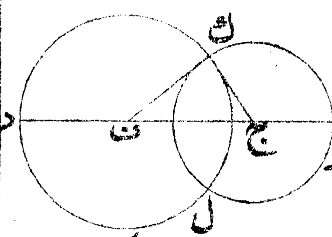
شکل ۲۲ عملی

ایک مثلث بناؤ جسکے ضلعے الگ الگ برابر ہوں دیے ہوئے ایسے تین خط مستقیم کے کہ انمیں سے ہر ایک دو ملکر تیسرے سے بڑے ہیں

فرض کرو کہ ا اور ب اور س دیے ہوئے ایسے تین خط مستقیم ہیں کہ انہیں سے ہر ایک دو ملکر تیسرے سے بڑے ہیں یعنی ا اور ب ملکر بڑے ہیں س سے اور ا اور س ملکر ب سے اور ب اور س ملکر ا سے

ا
ب
س

ایسا مثلث بنانا ہی کہ اسکے ضلعے الگ الگ برابر ہوں ا اور ب اور س کے



ایسا خط مستقیم د ی کھینچو کہ وہ نقطہ د پر محدود ہو لیکن ی کی طرف غیر محدود ہو

د ف برابر ا کے اور ف ج برابر ب کے اور ج ہ برابر س کے بناؤ شکل ۳

ف مرکز سے ف د دوری پر دائرہ د ک ل کھینچو — اصول موضوعہ ۳

اور ج مرکز سے ج ہ دوری پر دائرہ ہ ک ل کھینچو — اصول موضوعہ ۳

نقطہ ک سے جہاں دونوں دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ک ف اور ک ج نقطوں ف اور ج تک کھینچو — اصول موضوعہ ۱

تو مثلث ک ف ج کے ضلعے خط مستقیم ا اور ب اور س کے الگ الگ برابر ہونگے

چونکہ ف مرکز دائرہ د ک ل کا ہی

اسلئے ف ک برابر ہی ف د کے — حد ۱۵

لیکن ف د برابر ا کے بنایا گیا ہی

اسلئے ف ک برابر ہی ا کے — علوم متعارفہ ۱

پھر چونکہ ج مرکز دائرہ ہ ک ل کا ہی

اسلئے ج ك برابر ہی ج ہ کے

لیکن ج ہ برابر س کے بنایا گیا ہی

اسلئے ج ك برابر ہی س کے

اور ف ج برابر ب کے بنایا گیا ہی

اسلئے تین خط مستقیم ك ف اور ف ج اور ج ك الگ الگ برابر ہیں ا اور ب اور س کے

اور اسلئے مثلث ك ف ج کے تین ضلعے ك ف اور ف ج اور ج ك الگ الگ برابر ہیں دیے ہوئے تین خط مستقیم ا اور ب اور س کے اور ایسی ہی مثلث کے بنانیکی ضرورت تھی

دیے ہوئے تین خط مستقیم میں سے ہر ایک دو کا تیسرے سے بڑے ہونا اسلئے ضروری ہی کیونکہ بغیر اس شرط کے (جیسا کہ اس مقالہ کی بیسویں شکل سے ظاہر ہی) مثلث نہیں بن سکتا ہی

بعض لوگ اقلیدس پر یہہ اعتراض کرتے ہیں کہ دائروں کا آپسمیں کٹنا ثابت نہیں کیا ہی لیکن اس شرط پر کہ خط مستقیم د ف اور ف ج اور ج ہ میں سے ہر ایک دو ملکر تیسرے سے بڑے ہیں خیال کرنے سے صاف ظاہر ہی کہ دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں کے کیونکہ اس کتاب کا پڑھنے والا جو ذرا بھی عقل رکھتا ہوگا فوراً سمجھ جائیگا کہ دائرہ جو ف مرکز سے ف د دوری پر کھینچا ہی خط مستقیم ف ج کو ف اور ہ نقطوں کے درمیان کاٹے گا کیونکہ ف ہ بڑا ہی ف د سے اور دائرہ جو ج مرکز سے ج ہ دوری پر کھینچا ہی خط مستقیم د ج کو د اور ج نقطوں کے درمیان کاٹے گا کیونکہ د ج بڑا ہی ج ہ سے اور یہہ دائرے ضرور آپسمیں کاٹیں گے کیونکہ ف د اور ج ہ ملکر ف ج سے بڑے ہیں

اس مقالہ کی پہلی شکل اس شکل کی ایک خاص صورت ہی کیونکہ اس شکل میں اگر ا اور ب اور س آپسمیں برابر ہوں تو یہہ شکل اور پہلی شکل ایک ہی ہو جائیگی

مشق

۱ ایک دیئے ہوئے مثلث کی برابر مثلث بناؤ

۲ ایک دی ہوئی مستقیم الاضلاع کے برابر مستقیم الاضلاع بناؤ

شکل ۲۳ عملی

دیئے ہوئے خط مستقیم کے دیئے ہوئے نقطہ پر ایک زاویہ مستقیم الخطین برابر دیئے ہوئے زاویہ مستقیم الخطین کے بناؤ

فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم ہے اور اسمیں ا دیا نقطہ ہے اور دس ی دیا ہوا زاویہ مستقیم الخطین ہے خط مستقیم اب کے نقطہ ا پر زاویہ مستقیم الخطین جو زاویہ دس ی کے برابر ہو بنانا ہے

س د اور س ی میں نقطے د اور ی مقرر کرو

د ی ملاؤ

اب پر ایک ایسا مثلث اف ج بناؤ کہ اسکے ضلعے برابر تین خط مستقیم س د اور د ی اور ی س کے اسطرح سے ہوں کہ اف برابر ہو س د کے اور ف ج برابر د ی کے اور ج ا برابر ی س کے شکل ۲۲

تو زاویہ ف اج برابر زاویہ دس ی کے ہوگا

چونکہ ف ا اور اج الگ الگ برابر ہیں د س اور س ی کے

اور قاعدہ ف ج برابر ہے قاعدہ د ی کے

اسلئے زاویہ ف اج برابر ہے زاویہ دس ی کے شکل ۸

اسلئے دیئے ہوئے خط مستقیم اب کے نقطہ ا پر زاویہ ف اج برابر دیئے ہوئے زاویہ مستقیم الخطین دس ی کے بن گیا - اور اسی زاویہ کے بنانے کی ضرورت تھی

مشق

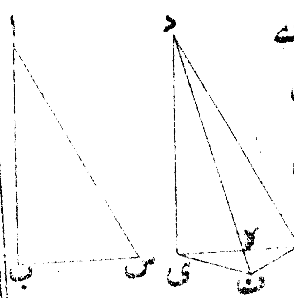
۱ اگر کسی مثلث کے دو زاویے ملکر برابر تیسرے زاویہ کے ہوں تو اُس مثلث کے دو مثلث متساوی الساقین ہو سکتے ہیں

۲ اگر مثلث اب س کے زاویے ا اور ب ملکر برابر ہوں زاویہ س کے تو ضلع اب اُس خط مستقیم سے جو زاویہ س کی راس سے اب کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک کھینچا جائے دونا ہوگا

۳ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدہ پر کا ایک زاویہ اور اُسکے ضلعوں کا جوڑ معلوم ہی اُس مثلث کی شکل بناؤ

شکل ۲۴ اثباتی

اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں لیکن زاویہ جو ایک مثلث کے اِن دو ضلعوں سے بنا ہی بڑا ہو دوسرے مثلث کے اُس زاویہ سے جو اِن ضلعوں کے برابر ضلعوں سے بنا ہی تو قاعدہ اُس مثلث کا جسکا زاویہ بڑا ہی بڑا ہوگا دوسرے مثلث کے قاعدہ سے



فرض کرو کہ اب س اور د ی ف ایسے دو مثلث ہیں کہ اُنکے ضلعے اب اور اس الگ الگ برابر ہیں ضلعوں د ی اور د ف کے یعنی اب برابر ہی د ی کے اور اس برابر د ف کے لیکن زاویہ ب اس بڑا ہی زاویہ ی د ف سے

تو قاعدہ ب س بڑا ہوگا قاعدہ ی ف سے

فرض کرو کہ د ی اور د ف میں د ی بڑا نہیں ہی د ف سے

د ی کے نقطہ د پر اور اُسکے اسطرف جدھر د ف ہی زاویہ ی د ج برابر زاویہ ب اس کے بناؤ

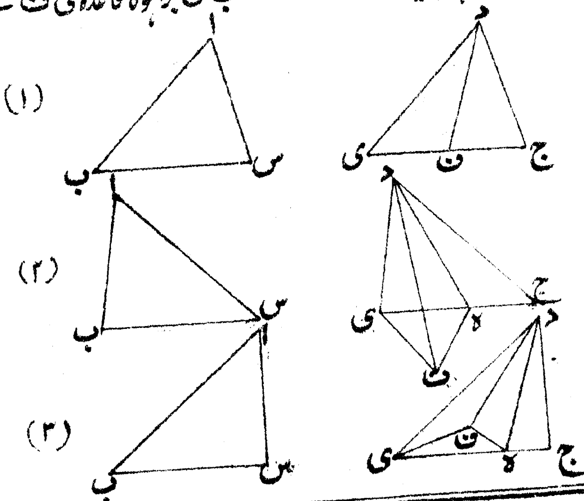
شکل ۲۳

د ج برابر د ف یا اس کے بناؤ — شکل ۳
اور ی ج اور ج ف ملاؤ
اب چونکہ د ی برابر ہے اب کے اور د ج برابر اس کے یعنے مثلث
د ی ج کے دو ضلعے د ی اور د ج مثلث ا ب س کے دو ضلعوں
اب اور اس کے الگ الگ برابر ہیں
اور زاویہ ی د ج برابر زاویہ ب اس کے بنا لیا گیا ہے
اسلئے قاعدہ ی ج برابر ہے قاعدہ ب س کے — شکل ۴
اور چونکہ مثلث د ف ج میں د ج برابر ہے د ف کے
اسلئے زاویہ د ف ج برابر ہے زاویہ د ج ف کے
لیکن زاویہ د ج ف بڑا ہے زاویہ ی ج ف سے
اسلئے زاویہ د ف ج بھی بڑا ہے زاویہ ی ج ف سے
اور اسلئے زاویہ ی ف ج اور بھی زیادہ بڑا ہے زاویہ ی ج ف سے
اور چونکہ مثلث ی ف ج میں زاویہ ی ف ج بڑا ہے زاویہ ی ج ف
سے اور بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہے — شکل ۱۹
اسلئے ضلع ی ج بڑا ہے ضلع ی ف سے
لیکن ی ج برابر ب س کے ثابت ہو چکا ہے
اسلئے ب س بڑا ہے ی ف سے
اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے
الخ — یہی ثابت کرنا تھا۔

اس شکل میں اقلیدس نے اس بات کو بغیر ثابت کئے ہوئے مان لیا ہے کہ د ہ چھوٹا ہے د ج
سے یعنی نقطہ ف خط ی ج کے نیچے ہے اسکو ہم اسطرح ثابت کر سکتے ہیں چونکہ زاویہ د ج مثلث

د ی ہ کا زاویہ خارجہ ہی اسلئے زاویہ د ہ ج بڑا ہی زاویہ داخلہ د ی ج سے (شکل ۱۶)
چونکہ مثلث د ی ج میں د ج بڑا د ی سے یا اُس کے برابر ہی اسلئے زاویہ د ی ج بڑا ہی زاویہ
د ج ی سے یا اُسکے برابر ہی (شکل ۱۸ و ۵) لیکن یہہ ثابت ہوچکا ہی کہ زاویہ د ہ ج زاویہ د ی ج
سے بڑا ہی اسلئے زاویہ د ہ ج زاویہ د ج ہ سے بڑا ہی اور اسواسطے د ج بڑا ہی د ہ سے (شکل ۱۹)
لیکن د ج برابر ہی د ف کے اسلئے د ف بڑا ہی د ہ سے یعنی نقطہ ف خط ی ج کے نیچے ہی
اس شکل میں یہہ شرط کہ ضلع د ی ضلع د ف سے بڑا نہیں ہی سمسن صاحب نے زیادہ کی ہی اگر یہہ
شرط نہو تو شکل کی تین صورتیں ہوسکتی ہیں یعنی نقطہ ف خط ی ج میں واقع ہو یا اُس کے اوپر یا نیچے
ہو اگر ف خط ی ج میں واقع ہو تو اُس صورت میں صاف ظاہر ہی کہ ی ف چھوٹا ہوگا ی ج سے
اور اگر ف خط ی ج سے اوپر واقع ہو تو د ف اور ی ف ملکر د ج اور ی ج سے چھوٹے
ہوں گے (شکل ۲۱) اور چونکہ د ف اور د ج آپسمیں برابر ہیں اسلئے ی ف چھوٹا ہوگا ی ج سے
یہہ شکل اسطرح بھی ثابت ہوسکتی ہی

فرض کرو کہ ا ب س اور د ی ف ایسے دو مثلث ہیں کہ اُنکے دو ضلعے ا ب اور ا س الگ
الگ برابر ہیں دو ضلعوں د ی اور د ف کے یعنی ا ب برابر ہی د ی کے اور ا س برابر د ف کے
لیکن زاویہ ب ا س بڑا ہی زاویہ ی د ف سے تو قاعدہ ب س بڑا ہوگا قاعدہ ی ف سے



د ی سے نقطہ د پر اور اسکے اسطرف جدھر د ف ہی زاویہ ی د ج برابر زاویہ ب ا س کے بناؤ — شکل ۲۳

د ج برابر د ف یا ا س کے بناؤ — شکل ۳

ج ی ملاؤ ج ی یا ن ف میں ہوکر گذریگا (پہلی صورت دیکھو) یا ف سے نیچے یا اوپر ہوکر گذریگا (دوسری اور تیسری صورت دیکھو)

دوسری اور تیسری صورتوں میں زاویہ ف د ج کے خط مستقیم د ہ سے دو برابر حصے کرو۔ شکل ۹ اور ہ سے جہاں د ہ خط ی ج سے ملتا ہی ف تک خط ہ ف کھینچو

چونکہ ا ب برابر ہی د ی کے اور ا س برابر د ج کے (تینوں صورتیں دیکھو) یعنے مثلث ا ب س کے دو ضلعے ا ب اور ا س الگ الگ برابر ہیں مثلث د ی ج کے دو ضلعوں د ی اور د ج کے

اور زاویہ ب ا س برابر ہی زاویہ ی د ج کے

اسلئے قاعدہ ب س برابر ہی قاعدہ ی ج کے — شکل ۴

پہلی صورت — چونکہ ی ج بڑا ہی ی ف سے اور ی ج برابر ب س کے ثابت ہوچکا ہی

اسلئے ب س بڑا ہی ی ف سے

دوسری اور تیسری صورت — چونکہ مثلث ف د ہ اور ج د ہ میں ضلع د ف برابر ہی ضلع د ج کے اور د ہ دونوں مثلثوں میں مشترک ہی اور زاویہ ف د ہ برابر ہی زاویہ ج د ہ کے

اسلئے قاعدہ ف ہ برابر ہی قاعدہ ج ہ کے — شکل ۴

ان دونوں برابروں میں ی ہ ملاؤ

اسلئے ف ہ اور ہ ی ملکر برابر ہوئے ی ج کے — علوم متعارفہ ۲

لیکن ف ہ اور ہ ی ملکر بڑے ہیں ی ف سے — شکل ۲۰

اسلئے ی ج بڑا ہی ی ف سے

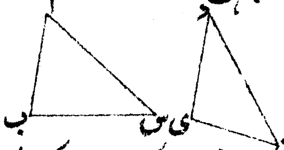
لیکن ب س برابر ی ج کے ثابت ہوچکا ہی

اِسلئے ب س بھی بڑا ہی ی ف سے

اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا

چوبیسویں شکل کے ثابت کرنے کا تیسرا طریقہ یہہ ہی

فرض کرو کہ مثلث اب اور دی ف میں اب برابر ہی دی کے اور اس برابر



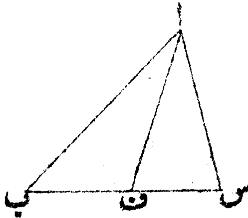
دف کے لیکن زاویہ ب اس بڑا ہی زاویہ ی دف سے

تو قاعدہ ب س بڑا ہوگا قاعدہ ی ف سے

مثلث دی ف کو مثلث اب س پر اسطرح رکھو کہ ضلع دی ضلع اب کو پورا پورا ڈھک لے

تو چونکہ زاویہ ی دف زاویہ ب اس سے چھوٹا ہی دف ضلعوں ب ا اور اس کے درمیان

پڑے گا اور نقطہ ف یا تو ب س پر یا اُس سے اوپر یا نیچے پڑے گا

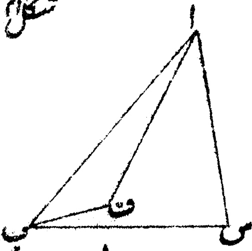


پہلی صورت - اگر نقطہ ف قاعدہ ب س پر پڑتا ہی

تو ب س بڑا ہی ب ف سے

اسلئے ب س بڑا ہی ی ف سے

دوسری صورت - اگر نقطہ قاعدہ ب س سے اوپر پڑتا ہی

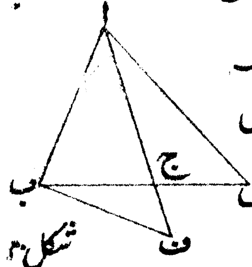


تو اس اور ب س ملکر بڑے ہیں اف اور ب ف سے

اور اف اور اس آپسمیں برابر ہیں

اسلئے ب س بڑا ہی ب ف سے

اسلئے ب س بڑا ہی ی ف سے



تیسری صورت - اگر نقطہ ف قاعدہ ب س سے نیچے پڑتا ہی

فرض کرو کہ اف اور ب س ایک دوسرے کو نقطہ ج پر کاٹتے ہیں

تو چونکہ اج اور ج س ملکر بڑے ہیں اس سے اور

فج اور ج ب ملکر ب ف سے

اسلئے اج اور ج ف اور س ج اور ج ب ملکر بڑے ہیں اس اور ب ف سے

یعنے اف اور ب س ملکر بڑے ہیں اس اور ب ف سے

لیکن اف برابر ہی اس کے

اسلئے ب س بڑا ہو ب ف سے

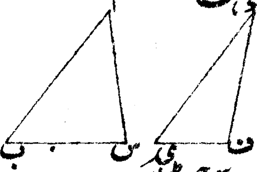
اسلئے ب س بڑا ہی ف سے

اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

شکل ۲۵ اثباتی

اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں لیکن قاعدہ ایک مثلث کا دوسرے مثلث کے قاعدہ سے بڑا ہو تو جس مثلث کا قاعدہ بڑا ہی اُسکے ضلعوں سے بنا ہوا زاویہ دوسرے مثلث کے اُس زاویہ سے جو اُن ضلعوں کے برابر ضلعوں سے بنا ہی بڑا ہوگا

فرض کرو کہ اب س اور دی ف ایسے دو مثلث ہیں کہ اُنکے دو ضلعے اب اور اس الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں دی اور دف کے یعنی اب برابر ہی دی کے اور اس برابر دف کے لیکن قاعدہ ب س بڑا ہی قاعدہ ی ف سے



تو زاویہ ب اس بڑا ہوگا زاویہ ی دف سے

کیونکہ اگر زاویہ ب اس زاویہ ی دف سے بڑا نہیں ہی تو زاویہ ب اس یا تو اُس کے برابر ہی یا اُس سے چھوٹا ہی

اگر زاویہ ب اس زاویہ ی دف کے برابر ہی

تو قاعدہ ب س کو بھی قاعدہ ی ف کے برابر ہونا چاہیئے — شکل ۴

لیکن قاعدہ ب س قاعدہ ی ف کے برابر نہیں ہی — فرض

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ی دف کے برابر نہیں ہی

اگر زاویہ ب اس زاویہ ی دف سے چھوٹا ہی

تو قاعدہ ب س کو بھی قاعدہ ی ف سے چھوٹا ہونا چاہیئے — شکل ۲۴

لیکن قاعدہ ب س قاعدہ ی ف سے چھوٹا نہیں ہی — فرض

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ی دف سے چھوٹا نہیں ہی

اور یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ ب اس زاویہ ی دف کے برابر نہیں ہی

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ی دف سے بڑا ہی

اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الخ — یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کو اسطرح بھی ثابت کر سکتے ہیں — فرض کرو کہ مثلث ا ب س اور د ی ف میں ضلع

ا ب برابر ہی ضلع د ی کے اور ضلع ا س برابر ضلع د ف کے لیکن قاعدہ ب س بڑا ہی قاعدہ ی ف

سے تو زاویہ ب اس بڑا ہوگا زاویہ ی د ف سے

کیونکہ اگر مثلث د ی ف اور ا ب س اسطرح رکھے جائیں کہ نقطہ ی نقطہ ب پر اور ی ف

کی سمت ب س کی سمت پر ہو اور زاویے ی د ف اور ب اس آمنے سامنے ہوں تو چونکہ ی ف

چھوٹا ہی ب س سے نقطہ ف قاعدہ ب س پر ب اور س کے درمیان پڑیگا — د ا ملاؤ کی چار صورتیں ہیں

پہلی صورت یہہ کہ د ا قاعدہ ب س کو ف پر کاٹے

چونکہ زاویے ب اد اور ب د ا برابر ہیں کیونکہ ا ب اور ب د برابر ہیں اور زاویہ

ب اس زاویہ ب اد سے بڑا ہی اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د ف یعنی ی د ف سے بڑا ہی

دوسری صورت یہہ کہ د ا قاعدہ ب س کو ف اور س کے درمیان کاٹے

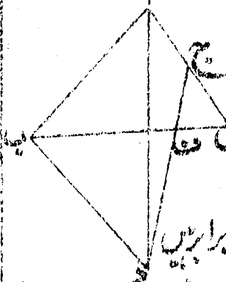
چونکہ زاویہ ب د ا زاویہ ب د ف سے بڑا ہی (علوم متعارفہ ۹)

اور زاویے ب د ا اور ب ا د برابر ہیں کیونکہ ب ا اور ب د برابر ہیں

اسلئے زاویہ ب ا د زاویہ ب د ف سے بڑا ہی

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د ف یعنی زاویہ ی د ف سے اور بھی زیادہ بڑا ہی

تیسری صورت یہہ کہ دا قاعدہ ب س کو ت اور ب کے درمیان کاٹے - د ت کو ج تک بڑھاؤ



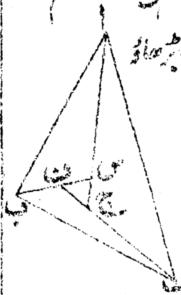
چونکہ دج بڑا ہی د ت سے اور د ت برابر اس کے ہی

اسلئے دج بڑا ہی اس سے یعنی اج سے اور بھی زیادہ بڑا ہی

اسلئے زاویہ داج زاویہ ادج سے بڑا ہی (شکل ۱۸)

اور زاویے ب اد اور ب دا برابر ہیں کیونکہ ب دا اور ب ا برابر ہیں

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د ت سے یعنی زاویہ ی د ت سے بڑا ہی علوم متعارفہ



چوتھی صورت یہہ کہ دا قاعدہ ب س کو نہ کاٹے - اس کو ج تک بڑھاؤ

چونکہ دج چھوٹا ہی د ت سے اور د ت برابر اس کے ہی

اسلئے دج چھوٹا ہی اس سے یعنی اج سے اور بھی زیادہ چھوٹا ہی

اسلئے زاویہ ج اد زاویہ ج دا سے چھوٹا ہی شکل ۱۸

اور زاویے ب اد اور ب دا برابر ہیں کیونکہ ب دا اور ب ا برابر ہیں

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د ت سے یعنی زاویہ ی د ت سے بڑا ہی (علوم متعارفہ ۵)

یہہ شکل چوبیسویں شکل کا عکس ہی اور آٹھویں شکل کے ساتھہ وہی علاقہ رکھتی ہی جو چوبیسویں شکل چوتھی شکل کے ساتھہ رکھتی ہی ان چار شکلوں کے آپس کا علاقہ انکو اسطرح بیان کرنے سے معلوم ہوگا

شکل ۴	اگر اب = دی اور اس = د ت اور زاویہ ا = زاویہ د	تو ب س = ی ت
شکل ۸	اگر اب = دی اور اس = د ت اور ب س = ی ت	تو زاویہ ا = زاویہ د

شکل ۴۴ - اگر اب = دی اور اس = دف لیکن زاویہ ا > زاویہ د } تو ب س > ی ف

شکل ۴۵ - اگر اب = دی اور اس = دف لیکن ب س > ی ف } تو زاویہ ا > زاویہ د

ان چار شکلوں میں سے دو دو کو ملا کر اسطرح بیان کرتے ہیں "اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں تو قاعدہ ایک مثلث کا دوسرے مثلث کے قاعدہ سے بڑا یا چھوٹا ہوگا (شکل ۴۴) یا اُسکے برابر ہوگا (شکل ۴) جیسا کہ پہلے مثلث کے قاعدہ کے سامنے کا زاویہ بڑا یا چھوٹا ہی دوسرے مثلث کے قاعدہ کے سامنے کے زاویہ سے یا اُسکے برابر" اور اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں تو ایک مثلث کے دو ضلعوں سے بنا ہوا زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلعوں سے بنے ہوئے زاویہ سے بڑا یا چھوٹا ہوگا (شکل ۴۵) یا اُسکے برابر ہوگا (شکل ۸) جیسا کہ پہلے مثلث کا قاعدہ بڑا یا چھوٹا ہی دوسرے مثلث کے قاعدہ سے یا اُسکے برابر ہی"

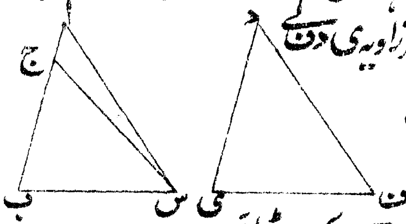
شکل ۴۶ اثباتی

اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے ایک ضلع کے برابر ہو اور یہہ برابر ضلعے خواہ برابر زاویوں کے درمیان کے ہوں یا اُنکے سامنے کے ہوں تو ایک مثلث کے باقی ضلعے الگ الگ برابر ہوں گے دوسرے مثلث کے باقی ضلعوں کے اور تیسرا زاویہ بھی ایک کا برابر ہوگا دوسرے مثلث کے تیسرے زاویہ کے

فرض کرو کہ اب س اور دی ف ایسے دو مثلث ہیں کہ اُنکے زاویے اب س
اور اس ب الگ الگ برابر ہیں زاویوں دی ف اور دف ی کے یعنی زاویہ اب س
برابر ہے زاویہ دی ف کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ دف ی کے اور ایک ایک
ضلع بھی ان مثلثوں کا آپسمیں برابر ہے

پہلے فرض کرو کہ ضلعے ب س اور ی ف جو ان مثلثوں کے برابر زاویوں
کے درمیان ہیں آپسمیں برابر ہیں

تو باقی ضلعے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہوں گے دوسرے مثلث کے
باقی ضلعوں کے یعنی ضلع اب برابر ہوگا ضلع دی کے اور ضلع اس برابر ضلع دف کے
اور تیسرا زاویہ ب اس بھی برابر ہوگا تیسرے زاویہ ی دف کے



کیونکہ اگر ضلع اب ضلع دی
کے برابر نہیں ہے
تو ایک ان دونوں میں سے ضرور دوسرے سے بڑا ہے
اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اب بڑا ہے دی سے

ب ج برابر ی د کے بناؤ — شکل ۳

اور س ج ملاؤ — اصول موضوعہ ۱

چونکہ دو مثلث ج ب س اور دی ف میں ج ب برابر ہے دی کے اور
ب س برابر ی ف کے یعنی دو ضلعے ج ب اور ب س الگ الگ برابر
ہیں دی اور ی ف کے

اور زاویہ ج ب س برابر ہے زاویہ دی ف کے — فرض

اسلئے قاعدہ ج س برابر ہے قاعدہ دف کے اور مثلث ج ب س برابر ہے
مثلث دی ف کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں دوسرے

مثلث کے باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپسمیں برابر ہیں جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں

شکل ۴

اسلئے زاویہ ج س ب برابر ہی زاویہ د ف ی کے

لیکن زاویہ اس ب برابر ہی زاویہ د ف ی کے — فرض

اسلئے زاویہ ج س ب برابر ہی زاویہ اس ب کے — علوم متعارفہ ۱

یعنے چھوٹا زاویہ برابر بڑے زاویہ کے ہی اور یہہ ناممکن ہی — علوم متعارفہ ۹

اسلئے اب نابرابر نہیں ہی د ب کے

یعنے اب برابر ہی دی کے

اب مثلث اب س اور دی ف میں چونکہ اب برابر ہی دی کے اور ب س برابر ی ف کے اور زاویہ اب س برابر زاویہ دی ف کے — فرض

اسلئے قاعدہ اس برابر ہی قاعدہ د ف کے اور تیسرا زاویہ ب اس برابر تیسرے زاویہ ی د ف کے

شکل ۴

دوسری صورت یہہ فرض کرو کہ ضلعے جو برابر زاویوں کے سامنے ہیں آپسمیں برابر ہیں یعنی اب برابر ہی دی کے

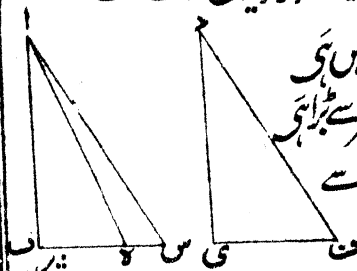
تو اس صورت میں بھی باقی ضلعے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہونگے دوسرے مثلث کے باقی ضلعوں کے یعنی ب س برابر ہوگا ی ف کے اور اس برابر د ف کے اور تیسرا زاویہ ب اس برابر ہوگا تیسرے زاویہ ی د ف کے

کیونکہ اگر ب س برابر ی ف کے نہیں ہی

تو ان دونوں میں سے ایک ضرور دوسرے سے بڑا ہی

فرض کرو کہ ب س بڑا ہی ی ف سے

ب ہ برابر ی ف کے بناؤ



شکل ۴

اور اہ ملاؤ

چونکہ مثلث اب ہ اور دی ف میں اب برابر ہے دی کے اور ب ہ برابر ی ف کے اور زاویہ اب ہ برابر زاویہ دی ف کے

اسلئے قاعدہ اہ برابر ہے قاعدہ ہ ف کے اور مثلث اب ہ برابر مثلث دی ف کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں دوسرے مثلث کے باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپسمیں برابر ہیں جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں

اسلئے زاویہ اہ ب برابر ہے زاویہ دف ی کے

لیکن زاویہ دف ی برابر ہے زاویہ اس ب کے — مفروض

اسلئے زاویہ اہ ب برابر ہے زاویہ اس ب کے — علوم متعارفہ

یعنی مثلث اہ س کا زاویہ خارجہ اہ ب برابر ہے اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ اس ب کے اور یہہ ناممکن ہے — شکل ۱۶

اسلئے ب س نابرابر نہیں ہے ی ف کے

یعنی ب س برابر ہے ی ف کے

اب مثلث اب س اور دی ف میں چونکہ اب برابر ہے دی کے اور ب س برابر ی ف کے اور زاویہ اب س برابر زاویہ دی ف کے

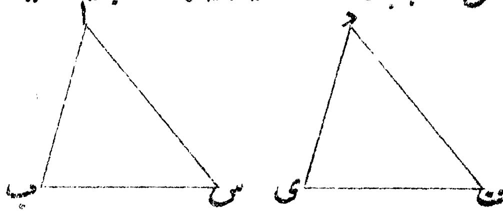
اسلئے قاعدہ اس برابر ہے قاعدہ دف کے اور تیسرا زاویہ ب اس برابر تیسرے زاویہ ی دف کے — شکل ۴

اسواسطے اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کو عمل تطبیق سے اسطرح ثابت کرسکتے ہیں

فرض کرو کہ اب س اور د ی ف ایسے دو مثلث ہیں کہ انکے زاویے اب س اور اس ب الگ الگ برابر ہیں زاویوں د ی ف اور د ف ی کے یعنی زاویہ اب س برابر ہی زاویہ د ی ف کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ د ف ی کے اور ایک ضلع ایک مثلث کا برابر ہی دوسرے مثلث کے ایک ضلع کے

پہلی صورت فرض کرو کہ ضلعے ب س اور ی ف جو برابر زاویوں کے درمیان ہیں آپسمیں برابر ہیں تو باقی ضلعے ایک مثلث کے برابر ہونگے دوسرے مثلث کے باقی ضلعوں کے یعنی ضلع اب برابر ہوگا ضلع د ی کے اور ضلع اس برابر ضلع د ف کے اور تیسرا زاویہ ب اس برابر ہے زاویہ ی د ف کے



کیونکہ اگر مثلث د ی ف مثلث اب س پر اسطرح رکھا جاسے کہ نقطہ ی نقطہ ب پر ہو اور ضلع ی ف ضلع ب س پر

تو چونکہ ی ف برابر ہی ب س کے نقطہ ف نقطہ س پر پڑیگا

اور چونکہ زاویہ ف ی د برابر ہی زاویہ س ب ا کے اسلئے ضلع ی د ضلع ب ا پر پڑیگا

اور اسلئے نقطہ د یا تو ب ا پر پڑیگا یا اسکی سیدھ میں پڑیگا

پھر چونکہ زاویہ ی ف د برابر ہی زاویہ ب س ا کے اسلئے ضلع ف د ضلع س ا پر پڑیگا

اور اسلئے نقطہ د یا تو س ا پر پڑیگا یا اسکی سیدھ میں پڑیگا

لیکن ثابت ہو چکا ہی کہ نقطہ د یا تو ب ا پر پڑیگا یا اسکی سیدھ میں پڑیگا

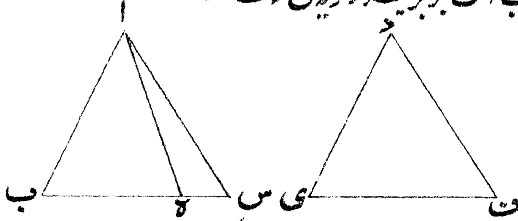
اسلئے نقطہ د نقطہ ا پر جو ب ا اور س ا دونوں میں مشترک ہی پڑیگا

اسلئے ی د اور ب ا ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیں گے اور اسلئے آپسمیں برابر ہونگے

اور ف د اور س ا ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیں گے اور اسلئے آپسمیں برابر ہونگے۔

اور زاویہ ی د ف اور ب ا س ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لینگے اور اسلئے آپسمیں
برابر ہونگے دوسری صورت یہہ فرض کرو کہ ضلعے جو مثلثوں کے برابر زاویوں کے سامنے ہیں آپسمیں برابر
ہیں یعنی ضلعے ا ب اور د ی آپسمیں برابر ہیں

تو اس صورت میں بھی ایک مثلث کے باقی ضلعے الگ الگ برابر ہونگے دوسرے مثلث کے
باقی ضلعوں کے یعنی ضلع ب س برابر ہوگا ضلع ی ف کے اور ضلع ا س برابر ضلع د ف کے
اور تیسرا زاویہ ب ا س برابر تیسرے زاویہ ی د ف کے



اگر مثلث د ی ف مثلث ا ب س پر اسطرح رکھا جائے کہ نقطہ د نقطہ ا پر اور ضلع د ی
ضلع ا ب پر ہو

تو چونکہ د ی برابر ا ب کے ہی اسلئے نقطہ ی نقطہ ب پر پڑیگا

اور چونکہ زاویہ د ی ف برابر ہی زاویہ ا ب س کے اسلئے ضلع ی ف ضلع ب س پر
پڑے گا اور نقطہ ف بھی نقطہ س پر پڑیگا

کیونکہ اگر ضلع ی ف ضلع ب س پر ہو لیکن نقطہ ف نقطہ س پر نہ پڑے
تو فرض کرو کہ نقطہ ف نقطہ ہ کی جگہہ پر ب اور س کے درمیان پڑتا ہی

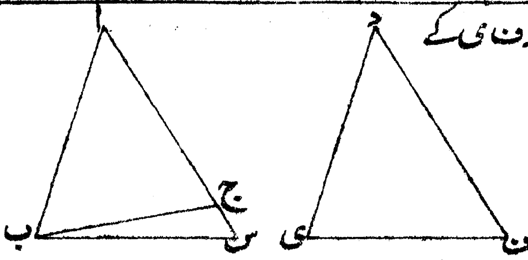
ا ہ ملاؤ

چونکہ زاویہ ا ہ ب برابر ہی زاویہ د ف ی اور زاویہ د ف ی برابر ہی زاویہ ا س ب کے
اسلئے زاویہ ا ہ ب برابر ہی زاویہ ا س ب کے

یعنی زاویہ خارجہ برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ کے اور یہہ ناممکن ہی شکل ۱۶
اسلئے نقطہ ف نقطہ ہ پر یعنی ب اور س کے درمیان نہیں پڑتا ہی اسی طرح یہہ بھی

ثابت ہوسکتا ہی کہ نقطہ ف ضلع ب س کے بڑھے ہوئے حصہ پر بھی نہیں پڑسکتا ہی
اسلئے ف ٹھیک س پر پڑیگا اور اسلئے ب س برابر ہی ی ف سکے
اسلئے قاعدہ اس برابر ہی قاعدہ دف کے اور زاویہ ب اس برابر ہی زاویہ ی دف کے
اسلئے اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا
چوتھی شکل کی شرح میں بیان ہوا ہی کہ ہر مثلث میں چھہ مقداریں ہوتی ہیں اور اگر ان چھہ
مقداروں میں سے کوئی تین دی ہوئی ہوں تو سوائے پہلی اور چوتھی صورت کے اور صورتوں
میں باقی تین مقداریں دریافت ہوسکتی ہیں اور مثلث معلوم ہوسکتا ہی چوتھی صورت میں اگر ایک خاص
شرط لگادی جائے تو دو مثلث جنمیں دو ضلعے ایک مثلث کے برابر ہوں دوسرے مثلث کے
دو ضلعوں کے اور اُن ضلعوں میں سے دو برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے برابر ہوں
آپسمیں برابر ہونگے اس قید کے ساتھ اس صورت کو اسطرح بیان کرتے ہیں "اگر ایک مثلث کے
دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ان ضلعوں میں سے دو برابر ضلعوں
کے سامنے کے زاویے آپسمیں برابر ہوں اور یہہ شرط بھی ہو کہ دوسرے دو برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے
دونوں حادہ ہوں یا دونوں منفرجہ ہوں یا اُنمیں سے ایک قائمہ ہو تو تیسرا ضلع ایک مثلث کا برابر
ہوگا دوسرے مثلث کے تیسرے ضلع کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہونگے
دوسرے مثلث کے باقی زاویوں کے" اقلیدس نے اس صورت کو چھوڑ دیا ہی وہ اسطرح ثابت ہوسکتی ہی
فرض کرو کہ اب س اور دی ف مثلثوں میں اب برابر ہی دی کے اور ب س برابر
ی ف کے اور زاویے ب اس اور ی دف جو دو برابر ضلعوں ب س اور ی ف کے
سامنے ہیں آپسمیں برابر ہیں اور زاویے اس ب اور دف ی جو دوسرے دو برابر ضلعوں
اب اور دی کے سامنے ہیں یا تو دونوں حادہ ہیں یا دونوں منفرجہ ہیں یا اُن میں سے
ایک قائمہ ہی
تو اس برابر ہوگا دف کے اور زاویہ اب س برابر زاویہ دی ف کے اور زاویہ اس ب

برابر زاویہ د ف ی کے



اگر اس برابر د ف کے نہیں ہو تو ا ج برابر د ف کے بناؤ اور ب ج ملاؤ

چونکہ مثلث ا ب ج اور د ی ف میں ب ا برابر ہے ی د کے اور ا ج برابر د ف کے

اور زاویہ ب ا ج برابر ی د ف کے

اسلئے ب ج برابر ہے ی ف کے اور زاویہ ا ج ب برابر زاویہ د ف ی کے — شکل ۴

لیکن ب س برابر ہے ی ف کے — فرض

اسلئے ب ج برابر ہے ب س کے — علوم متعارفہ ۱

اسلئے زاویہ ب س ج برابر ہے زاویہ ب ج س کے — شکل ۵

پہلے فرض کرو کہ زاویے ا س ب اور د ف ی دونوں حادہ ہیں تو زاویہ ا ج ب بھی حادہ ہے

اور اسلئے ب ج س منفرجہ ہے — شکل ۱۳

اسلئے زاویہ ب س ج بھی منفرجہ ہے اور یہہ ہمارے فرض کے خلاف ہے

دوسری صورت فرض کرو کہ زاویے ا س ب اور د ف ی دونوں منفرجہ ہیں

تو زاویہ ا ج ب جو برابر زاویہ د ف ی کے ثابت ہو چکا ہے منفرجہ ہے

اور اسلئے ب ج س حادہ ہے — شکل ۱۳

اسلئے زاویہ ب س ج بھی حادہ ہے اور یہہ ہمارے فرض کے خلاف ہے

تیسری صورت فرض کرو کہ زاویوں ا س ب اور د ف ی میں سے کوئی ایک زاویہ قائمہ ہے

اگر زاویہ ا س ب قائمہ ہے تو زاویہ ب ج س بھی قائمہ ہے

اسلئے زاویے ب س ج اور ب ج س ملکر برابر دو قائموں کے ہیں اور یہہ ناممکن ہے — شکل ۱۷

اگر زاویہ د ف ی قائمہ ہی تو زاویہ ا ج ب بھی قائمہ ہی اور اسلیئے زاویہ ب ج س قائمہ ہی شکل ۱۳
اسلیئے زاویہ ب س ج بھی قائمہ ہی
اسلیئے زاویے ب س ج اور ب ج س ملکر برابر دو قائموں کے ہیں اور یہہ ناممکن ہی شکل ۱۷
اسلیئے اس نابرابر د ف کے نہیں ہی یعنی اس برابر د ف کے ہی
اسلیئے مثلث ا ب س برابر ہی مثلث د ی ف کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں دوسرے مثلث کے باقی زاویوں کے یعنی زاویہ ا ب س برابر ہی زاویہ د ی ف کے اور زاویہ ا س ب برابر زاویہ د ف ی کے
اسلیئے اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

مشق

۱ مثلث کے کسی دو ضلعوں سے بنے ہوئے زاویہ کے ایک خط دو برابر حصے کرتا ہی اگر اس خط کے کسی نقطہ سے ان ضلعوں پر عمود گراویں تو وہ آپسمیں برابر ہوں گے

۲ تین خط مستقیم دیئے ہوئے ہیں آپس سے کسی ایک خط مستقیم میں ایسا نقطہ دریافت کرو کہ عمود جو اس نقطہ سے باقی دو خطوں پر گرائے جائیں آپسمیں برابر ہوں اور یہہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں یہہ شکل ناممکن ہی

۳ تین نقطے دیئے ہوئے ہیں ایک ایسا خط کھینچو کہ وہ ان نقطوں میں سے کسی ایک نقطہ میں ہوکر گذرے اور عمود جو اسپر باقی دو نقطوں سے گرائے جائیں آپسمیں برابر ہوں اور یہہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں یہہ شکل ناممکن ہی

۴ مثلث ا ب س کے زاویہ ا کے ایک خط مستقیم دو برابر حصے کرتا ہی ب سے عمود ب د اس خط پر گرایا گیا ہی اور ب د بڑھکر اس سے یا اس کے بڑھے ہوئے حصہ سے نقطہ ی پر ملتا ہی ثابت کرو کہ ب د برابر ہی د ی کے

۵ ا ب اور ا س کوئی دو خط مستقیم نقطہ ا پر ملتے ہیں کسی نقطہ د سے ایک ایسا خط مستقیم ان

دونوں خطوں سے نقطے ی اور ف پر ملتا ہوا کھینچو کہ ای برابر ہو اف کے

۲ دو مثلث قایم الزاویہ ایسے ہیں کہ اُن کے وتر آپسمیں برابر ہیں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے ایک ضلع کے برابر ہی تو ثابت کرو کہ دونوں مثلث سبطرح آپسمیں برابر ہیں

حد زاویے متبادلہ اُن زاویوں کو کہتے ہیں جو دو خط مستقیم کسی تیسرے خط سے اُسکے دو نقطوں پر ملکر اُسکے آمنے سامنے کی طرفوں میں پیدا کرتے ہیں جیسا کہ اس شکل میں زاویے اب س اور ب س د زاویے متبادلہ ہیں

ا ب س د

شکل ۲۷ اثباتی

اگر ایک خط مستقیم کسی اور دو خط مستقیم پر گر کر زاویے متبادلہ ایک دوسرے کے برابر بناوے تو وہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں گے

فرض کرو کہ خط مستقیم ی ف دو خط مستقیم اب اور س د پر گر کر زاویے متبادلہ ای ف اور ی ف د ایک دوسرے کے برابر بناتا ہی

تو اب متوازی ہو گا س د کا

ا ی ب ج س ف د

اگر اب متوازی س د کا نہو

تو اب اور س د بڑھکر کسی طرف

خواہ ب اور د کی طرف یا ا اور س کی طرف کہیں ملجائیں گے

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اب اور س د بڑھکر ب اور د کی طرف نقطہ ج پر ملتے ہیں

تو ج ی ف ایک مثلث ہی

چونکہ مثلث ج ی ف کا ایک ضلع ج ی نقطہ ا تک بڑھا ہی

اِسلئے زاویہ خارجہ ای ف اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ی ف ج سے بڑا ہی شکل

لیکن زاویہ ای ف برابر ہی زاویہ ی ف ج کے فرض

اِسلئے زاویہ ای ف بڑا ہی زاویہ ی ف ج سے اور اُسکے برابر بھی ہی

اور یہہ ناممکن ہی

اِسلئے اب اور س د بڑھکر ب اور د کی طرف نہیں مل سکتے ہیں

اور اِسی طرح یہہ بھی ثابت ہو سکتا ہی کہ اب اور س د بڑھکر ا اور س کی طرف بھی نہیں مل سکتے ہیں

لیکن وہ خط مستقیم جو ایک سطح میں ہوں اور دونوں طرف کتنی ہی دور تک بڑھنے سے کہیں نہ ملیں ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں حد ۳۵

اِسلئے اب متوازی ہی س د کا

اِسلئے اگر ایک خط مستقیم کسی اور دو خط مستقیم پر الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل اور آگے کی شکل کے دعوی میں یہہ شرط ہونا ضروری کہ دونوں خط مستقیم جن پر تیسرا خط گرتا ہی ایک ہی سطح میں ہوں اگر یہہ شرط نہو تو ممکن ہو سکتا ہی کہ ایک خط مستقیم دو خط مستقیم پر گر کر زاویے تبادلہ برابر بناوے لیکن وہ دونوں خط مستقیم ایک دوسرے کے متوازی نہوں

مشق

۱ اگر خط مستقیم ی ج ہ ف کسی دو خط مستقیم اب اور س د کو جو ایک سطح میں ہیں نقطوں ج اور ہ پر کاٹے اور زاویے اج ی اور ف ہ د برابر بناوے تو اب اور س د ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے

۲ اگر خط مستقیم ی ج ہ ف دو خط مستقیم اب اور س د کو جو ایک سطح میں ہیں نقطوں ج اور ہ پر کاٹے اور زاویے ی ج ب اور د ہ ف ملکر برابر دو قائموں کے ہوں تو اب اور س د ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے

شکل ۲۸ اثباتی

اگر ایک خط مستقیم کسی اور دو خط مستقیم پر گر کر اپنی ایک طرف میں زاویے خارجہ اور اُسکے سامنے کا زاویہ داخلہ آپسمیں برابر بناوے یا اپنی ایک طرف کے دو زاویے داخلہ برابر دو قائموں کے بناوے تو وہ دونوں خط مستقیم متوازی ہونگے

فرض کرو کہ خط مستقیم ی ف دو خط مستقیم اب اور س د پر گر کر زاویہ خارجہ ی ج ب اُسکے سامنے کے زاویہ داخلہ ج ہ د کے برابر اپنی ایکطرف میں بناتا ہی یا اپنی ایک طرف کے دو زاویے داخلہ ب ج ہ اور ج ہ د برابر دو قائموں کے بناتا ہی

تو اب متوازی ہوگا س د کا

چونکہ زاویہ ی ج ب برابر ہی زاویہ ج ہ د کے — فرض

اور زاویہ ی ج ب برابر ہی زاویہ ا ج ہ کے — شکل ۱۵

اسلئے زاویہ ا ج ہ برابر ہی زاویہ ج ہ د کے — علوم متعارفہ ۱

اور یہہ زاویے متبادلہ ہیں

اسلئے اب متوازی ہی س د کا — شکل ۲۷

پھر چونکہ زاویے ب ج ہ اور ج ہ د ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — فرض

اور زاویے ا ج ہ اور ب ج ہ بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۱۳

اسلئے زاویے ا ج ہ اور ب ج ہ ملکر برابر ہیں زاویوں ج ہ د اور ب ج ہ کے — علوم متعارفہ ۱

ان برابروں میں سے زاویہ ب ج ہ جو دونوں میں مشترک ہی نکال ڈالو

اسلئے باقی زاویہ ا ج ہ برابر ہی باقی زاویہ ج ہ د کے — علوم متعارفہ ۳

اور یہہ زاویے متبادلہ ہیں

اسلئے اب متوازی ہے س د کا   شکل ۲۷

اسلئے اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر گرکر الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل میں دو شکلیں شامل ہیں

شکل ۲۹ اثباتی

اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے تو زاویے تبادلہ آپسمیں برابر اور اسکی ایک طرف میں زاویہ خارجہ اور اسکے سامنے کا زاویہ داخلہ آپسمیں برابر اور اسکی ایک طرف میں دو زاویے داخلہ ملکر برابر دو قائموں کے پیدا ہوں گے

فرض کرو کہ خط مستقیم ی ف دو متوازی خط مستقیم اب اور س د پر گرتا ہے

تو زاویے تبادلہ اج ہ اور ج ہ د

آپسمیں برابر ہوں گے اور ی ف کے ایکطرف

میں زاویہ خارجہ ی ج ب اور اسکے سامنے

کا زاویہ داخلہ ج ہ د آپسمیں برابر ہوں گے اور دو زاویے داخلہ ب ج ہ اور ج ہ د ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے

کیونکہ اگر زاویہ اج ہ زاویہ ج ہ د کے برابر نہو تو ان میں سے ایک ضرور دوسرے سے بڑا ہوگا

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ زاویہ اج ہ بڑا ہے

چونکہ زاویہ اج ہ بڑا ہے زاویہ ج ہ د سے

اور ان دونوں نابرابروں میں زاویہ ب ج ہ ملایا

اسلئے زاویے اج ہ اور ب ج ہ ملکر بڑے ہیں زاویوں ب ج ہ اور ج ہ د سے لیکن زاویہ اج ہ اور ب ج ہ ملکر برابر دو قائموں کے ہیں   شکل ۱۳

اسلئے زاویے ب ج ہ اور ج ہ د ملکر دو قائموں سے کم ہیں

لیکن اگر دو خط مستقیم پر ایک خط کے گرنے سے اُسکی ایک طرف میں دو زاویے داخلہ ایسے نہیں کہ وہ دونوں ملکر دو قائموں سے کم ہوں تو وہ دونوں خط مستقیم لگاتار بڑھائے جانے سے کہیں نہ کہیں اُسطرف میں جدھر وہ زاویے ہیں جو ملکر دو قائموں سے کم ہیں ملجائیں گے — علوم متعارفہ ۱۲

اِسلئے اب اور س د لگاتار بڑھائے جانے سے ملجائیں گے

لیکن یہہ کبھی نہیں مل سکتے ہیں کیونکہ یہہ متوازی ہیں — فرض

اِسلئے زاویہ اج ہ زاویہ ج ہ د کے نابرابر نہیں ہے یعنی اُسکے برابر ہے

چونکہ زاویہ اج ہ برابر ہے زاویہ ی ج ب کے — شکل ۱۵

اِسلئے زاویہ ی ج ب برابر ہے زاویہ ج ہ د کے — علوم متعارفہ ۱

اِن دونوں برابروں میں زاویہ ب ج ہ ملاؤ

اِسلئے زاویے ی ج ب اور ب ج ہ ملکر برابر ہیں زاویوں ب ج ہ اور ج ہ د کے — علوم متعارفہ ۲

لیکن زاویے ی ج ب اور ب ج ہ ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۱۳

اِسلئے زاویے ب ج ہ اور ج ہ د بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — علوم متعارفہ ۱

اِسلئے اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے تو زاویے الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

اِس شکل میں تین مختلف شکلیں شامل ہیں اُنمیں سے پہلی شکل ستائیسویں شکل کا عکس ہے اور دوسری اور تیسری شکلیں اٹھائیسویں شکل کے پہلے اور دوسرے حصہ کا عکس ہیں

اِس شکل کو پلیفیر صاحب نے بغیر بارہویں علوم متعارفہ کی مدد کے اِسطرح ثابت کیا ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم ی ف دو متوازی خط مستقیم اب اور س د پر گرتا ہے

تو زاویے متبادلہ اج ہ اور ج ہ د آپسمیں برابر ہوں گے

اور زاویہ خارجہ ی ج ب برابر ہوگا اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ج ہ د کے جو ی ف

کے اُسی طرف میں ہیں اور ی ف کے ایک طرف ہیں

دو زاویے داخلہ ب ج ہ اور ج ہ د ملکر

برابر دو قائموں کے ہوں گے

اگر زاویہ ا ج ہ برابر نہو زاویہ ج ہ د کے تو اِن میں سے ایک بڑا ہوگا دوسرے سے

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ زاویہ ا ج ہ بڑا ہے زاویہ ج ہ د سے

ہ ج کے نقطہ ج پر اور اُسکے اُسطرف میں جدھر زاویہ ا ج ہ ہے زاویہ ہ ج ک برابر زاویہ

ج ہ د کے بناؤ ک ج کو ل تک بڑھاؤ

چونکہ زاویے متبادلہ ک ج ہ اور ج ہ د آپسمیں برابر ہیں

اسلئے ک ل متوازی ہے س د کا — شکل ۲۷

لیکن ا ب بھی متوازی ہے س د کا — فرض

اسلئے ا ب اور ک ل جو ایک ہی نقطہ ج میں ہو کر گذرتے ہیں دونوں متوازی ہیں س د

کے اور یہ ناممکن ہے (بارہویں علوم متعارفہ کی شرح کو دیکھو)

اسلئے زاویے متبادلہ ا ج ہ اور ج ہ د نابرابر نہیں ہیں یعنی آپسمیں برابر ہیں

چونکہ زاویہ ی ج ب برابر ہے زاویہ ا ج ہ کے — شکل ۱۵

اور زاویہ ا ج ہ برابر زاویہ ج ہ د کے ثابت ہو چکا ہے

اسلئے زاویہ خارجہ ی ج ب برابر ہے زاویہ داخلہ ج ہ د کے — علوم متعارفہ ۱

چونکہ زاویہ ی ج ب برابر ہے زاویہ ج ہ د کے اور ان دونوں برابروں میں سے ہر ایک

میں زاویہ ب ج ہ ملایا

اسلئے زاویہ ی ج ب اور ب ج ہ ملکر برابر ہوئے زاویوں ب ج ہ اور ج ہ د کے — علوم متعارفہ ۲

لیکن زاویہ ی ج ب اور ب ج ہ ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۱۳

اسلئے زاویے داخلہ ب ج ہ اور ج ہ د بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — علوم متعارفہ

اسلئے اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے تو زاویے متبادلہ الخ - یہی ثابت کرنا تھا

مشق

۱ جو خط مستقیم مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کا متوازی ہوگا وہ ساقوں کے ساتھ برابر زاویے بنائیگا

۲ اگر دو خط مستقیم ا اور ب الگ الگ متوازی ہوں دو خط مستقیم س اور د کے یعنی ا متوازی ہو س کا اور ب متوازی ہو د کا تو ثابت کرو کہ ا کا جھکاؤ ب کے ساتھ ہی برابر ہوگا اُس جھکاؤ کے جو ب کا س کے ساتھ ہی

۳ اگر دو زاویے آپسمیں برابر ہوں اور اُن کی ایک ایک ساق آپسمیں متوازی ہو تو ایک زاویہ کی دوسری ساق دوسرے زاویہ کی دوسری ساق کے متوازی ہوگی

۴ ایک خط مستقیم کے سرے دو متوازی خط مستقیم پر ہیں اُس خط کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے ایک ایسا خط مستقیم کھینچا گیا ہی کہ اُسکے سرے اُن دو متوازی خطوں پر پڑتے ہیں تو ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کے بھی اُس نقطہ سے دو برابر حصے ہوتے ہیں

۵ اگر کسی نقطہ سے جو دو متوازی خط مستقیم سے برابر دوری پر ہی دو خط مستقیم اُن متوازی خطوں کو کاٹتے ہوئے کھینچے جائیں تو متوازی خطوں کے حصے جو اُن خطوں کے درمیان ہوں گے آپسمیں برابر ہوں گے

۶ اگر خط مستقیم جو ایک مثلث کے زاویہ خارجہ کے دو برابر حصے کرتا ہی اس مثلث کے قاعدہ کا متوازی بھی ہی تو ثابت کرو کہ وہ مثلث متساوی الساقین ہی

۷ مثلث ا ب س کے زاویہ ب اس کے خط ا د دو برابر حصے کرتا ہی اور ب س سے نقطہ د پر ملتا ہی د ی اور د ف متوازی ہیں ا س اور ا ب کے او ا ب ع ر ا س سے نقطوں ی اور ف پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ د ی اور د ف آپسمیں برابر ہیں

۸ مثلث ا ب س کا ضلع ب س نقطہ د تک بڑھایا گیا ہی اور س ی زاویہ اس بنکے

اور س ج زاویہ اس د کے دو برابر حصّے کرتا ہی س ی ضلع اب سے ی پر ملتا ہی ی ج متوازی ہی ب س کا اور اس کو نقطہ ف پر کاٹتا ہی ثابت کرو کہ ی ف اور ف ج آپسمیں برابر ہیں

شکل ۳۰ اثباتی

جو خط مستقیم کسی ایک ہی خط مستقیم کے متوازی ہوتے ہیں وہ آپسمیں بھی متوازی ہوتے ہیں

فرض کرو کہ اب اور س د میں سے ہر ایک متوازی ہی ی ف کا

تو اب متوازی ہوگا س د کا

ا ——— ج ——— ب
ی ——— ہ ——— ف
س ——— ك ——— د

ایسا خط ج ہ ك فرض کرو کہ وہ اب اور ی ف اور س د کو کاٹے

چونکہ ج ہ ك دو متوازی خط مستقیم اب اور ی ف کو نقطوں ج اور ہ پر کاٹتا ہی

اسلئے زاویہ اج ہ برابر ہی زاویہ متبادلہ ج ہ ف کے شکل ۹م

اور چونکہ ج ہ ك دو متوازی خط مستقیم ی ف اور س د کو نقطوں ہ اور ك پر کاٹتا ہی

اسلئے زاویہ ج ہ ف برابر ہی زاویہ داخلہ ہ ك د کے شکل ۹م

اور یہہ ثابت ہوچکا ہی کہ زاویہ اج ك برابر ہی زاویہ ج ہ ف کے

اسلئے زاویہ اج ك برابر ہی زاویہ ج ك د کے علوم متعارفہ

اور یہہ زاوئے متبادلہ ہیں

اسلئے اب متوازی ہی س د کا شکل ۲م

اسلئے جو خط مستقیم ایک ہی خط مستقیم کے الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل میں اگر اب اور ی ف میں سے ہر ایک متوازی ہو س د کا تو اسی طرح ثابت ہو سکتا ہی کہ اب اور ی ف آپسمیں متوازی ہوں گے اقلیدس نے جو صورت ثابت کی ہی وہ ایسی صاف ظاہر ہی کہ ثبوت کی محتاج نہیں ہی کیونکہ جب خط اب اور س د خط ی ف سے جو انکے درمیان ہی نہیں ملتے تو وہ آپسمیں بھی کہیں نہ ملیں گے اور اسلئے متوازی ہوں گے

شکل ۳۱ عملی

دیے ہوئے نقطہ سے ایک ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ دیے ہوئے خط مستقیم کا متوازی ہو

فرض کرو کہ ا دیا ہوا نقطہ اور ب س دیا ہوا خط مستقیم ہی

اسے ایک ایسا خط مستقیم کھینچنا ہی کہ وہ ب س کے متوازی ہو

ب س میں کوئی نقطہ د لو اور ا د ملاؤ

خط مستقیم ا د کے نقطہ ا پر زاویہ د ا ی برابر زاویہ ا د س کے اور ا د کی مقابل سمت میں بناؤ — شکل ۲۳

اور ی ا کو ف تک بڑھاؤ — اصول موضوعہ ۲

تو ی ف متوازی ہوگا ب س کا

چونکہ خط مستقیم ا د دو خط مستقیم ی ف اور ب س سے ملتا ہی اور ان کے ساتھ زاویے متبادلہ ی ا د اور ا د س ایک دوسرے کے برابر بنا ہی.

اسلئے ی ف متوازی ہی ب س کا — شکل ۲۷

اسلئے دیے ہوئے نقطہ ا سے خط مستقیم ی ا ف متوازی دیے ہوئے خط مستقیم ب س کا کھینچ گیا

اور اسی خط کے کھینچنے کی ضرورت تھی

اس شکل کے بنانے میں تیسویں شکل کی کچھ ضرورت نہ پڑیگی اگر گیارھویں اور بارھویں شکل کی مدد لیجائے

مشق

۱ دیے ہوئے خط مستقیم س د میں ایک ایسا نقطہ ب دریافت کرو کہ اگر اُس نقطہ سے ایک دیے ہوئے نقطہ ا تک خط مستقیم کھینچا جائے تو زاویہ ا ب س ایک دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

۲ مثلث قایم الزاویہ ا ب س کے وتر ا ب میں ایک ایسا نقطہ د دریافت کرو کہ ب د برابر ہو اُس عمود کے جو د سے اس پر گرایا جائے

۳ ا ب س ایک مثلث متساوی الساقین ہی اُسکی برابر ساقوں ا ب اور ا س میں ایسے نقطے د اور ی دریافت کرو کہ خط مستقیم ب د اور د ی اور ی س آپسمیں برابر ہوں

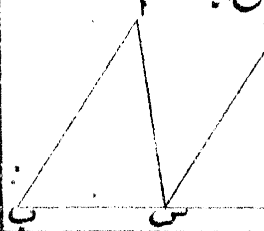
۴ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ ب س کے ساتھہ زاویے قائمہ بنانے والا خط مستقیم ضلع ا ب کو نقطہ ح پر اور س ا کے بڑھے ہوئے حصہ کو نقطہ ی پر کاٹتا ہی ثابت کرو کہ ا ی د مثلث متساوی الساقین ہی

۵ اُن مثلثوں میں جنکے راس کا زاویہ ایک ہی ہی اور جنکے قاعدے ایک ہی نقطہ میں ہوکر گذرتے ہیں وہ مثلث سب سے چھوٹا ہوگا جسکے قاعدہ کے اُس نقطہ پر دو برابر حصے ہوتے ہیں

شکل ۳۲ اثباتی

اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو زاویہ خارجہ برابر اپنے سامنے کے دو زاویوں داخلہ کے ہوگا اور تینوں زاویے داخلہ مثلث کے برابر دو قائموں کے ہوں گے

فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث ہی اور اُسکا ضلع ب س نقطہ د تک بڑھایا گیا ہی



تو زاویہ خارجہ ا س د برابر ہوگا اپنے سامنے کے دو زاویوں داخلہ ا ب س اور ب ا س کے اور مثلث کے تینوں زاویے داخلہ ا ب س اور ب ا س

اور اس ب ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے

نقطہ س سے س ی متوازی ب ا کا کھینچو — شکل ۳۱

چونکہ اب متوازی س ی کا ہے اور اس اُن پر گرتا ہے

اسلئے زاویے متبادلہ ا س ی اور ب ا س آپسمیں برابر ہیں — شکل ۲۹

پھر چونکہ اب متوازی س ی کا ہے اور ب د اُن پر گرتا ہے

اسلئے زاویہ خارجہ ی س د برابر ہے اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ اب س کے — شکل ۲۹

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ زاویہ ا س ی برابر ہے زاویہ ب ا س کے

اسلئے کل زاویہ خارجہ ا س د برابر ہے اپنے سامنے کے دو زاویوں داخلہ

ب ا س اور اب س کے — علوم متعارفہ ۱

ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ا س ب ملاؤ

اسلئے زاویہ ا س د اور ا س ب ملکر برابر ہیں تین زاویوں س ب ا اور

ب ا س اور ا س ب کے — علوم متعارفہ ۲

لیکن زاویے ا س د اور ا س ب ملکر برابر دو قائموں کے — شکل ۱۳

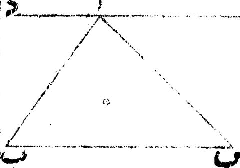
اسلئے زاویے س ب ا اور ب ا س اور ا س ب ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — علوم متعارفہ ۱

اسلئے اگر کسی مثلث کا ایک ضلع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل میں دو شکلیں شامل ہیں اس شکل کا دوسرا حصہ یعنی مثلث کے تینوں زاویے ملکر

برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں بغیر بڑھائے مثلث کے کسی ضلع کے اسطرح ثابت ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہے تو اسکے تینوں زاویے اب س ا ب س ا اور



س اب ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے

نقطہ ا سے د ا ی متوازی ب س کا کھینچو — شکل ۳۱

چونکہ د ا ی اور ب س آپسمیں متوازی ہیں اور اب اُنپر گرتا ہے

اسلیئے زاویہ ا ب س برابر ہی زاویہ متبادلہ ب اد کے — شکل ۲۹

اور چونکہ ی ا اور س ب آپسمیں متوازی ہیں اور اس اُنپر گرتا ہی

اسلیئے زاویہ ب س ا برابر ہی زاویہ متبادلہ س ا ی کے — شکل ۲۹

لیکن ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ ا ب س برابر ہی زاویہ د ا ب کے

اسلیئے زاویے ا ب س اور ب س ا ملکر برابر ہیں د ا ب اور س ا ی کے — علوم متعارفہ ۲

ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ب ا س ملاؤ

اسلیئے زاویہ ا ب س اور ب س ا اور س ا ب ملکر برابر ہیں زاویوں د ا ب اور ب ا س اور س ا ی کے — علوم متعارفہ ۲

لیکن زاویے د ا ب اور ب ا س اور س ا ی ملکر برابر ہیں دو قائموں کے — شکل ۱۳

اسلیئے زاویہ ا ب س اور ب س ا اور س ا ب ملکر برابر ہیں دو قائموں کے — علوم متعارفہ ۱

اسلیئے مثلث کے تینوں زاویے ملکر برابر ہیں دو قائموں کے - یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح ۱ ہر ایک شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلے اور چار قائمے ملکر برابر ہوتے ہیں اُتنے قائموں کے جو گنتی میں اُس شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دُونے ہوں

اگر کسی شکل مستقیم الاضلاع ا ب س د ی کے اندر کوئی نقطہ ف لیا جائے اور اُس نقطہ سے اُس شکل کے سب زاویوں تک خط مستقیم کھینچے جائیں تو ظاہر ہی کہ وہ شکل اُتنے مثلثوں میں تقسیم ہوگی جتنے اُس میں ضلعے ہیں



چونکہ ہر مثلث کے تینوں زاویے ملکر برابر ہیں دو قائموں کے اور یہاں اُتنے مثلث ہیں جتنے شکل مستقیم الاضلاع کے ضلعے ہیں

اسلیئے ان مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں اُتنے قائموں کے جو گنتی میں شکل کے

ضلعوں کی تعداد سے دو نے ہیں

لیکن اِن مثلثوں کے سب زاویے شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویوں داخلہ کے اور اُن زاویوں کے جو نقطہ ف پر بنے ہیں برابر ہیں

اور جو زاویے نقطہ ف پر جو اُن مثلثوں کا راس مشترک ہی بنے ہیں برابر ہیں چار قائموں کے

نتیجہ صحیح ۲ شکل ۱۵

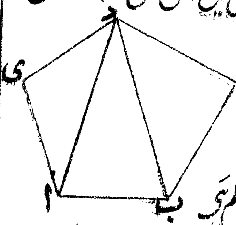
اسلئے اِن مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویوں داخلہ اور چار قائموں کے

لیکن ثابت ہو چکا ہی کہ اِن مثلثوں کے سب زاویے اتنے قائموں کے بھی برابر ہیں جو گنتی میں شکل مستقیم الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد سے دو نے ہیں

اسلئے شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلے اور چار قائمے ملکر برابر ہیں اُتنے قائموں کے جو گنتی میں شکل مستقیم الاضلاع کی تعداد سے دونے ہیں

یہ نتیجہ صحیح اسطرح بھی ثابت ہو سکتا ہی

اگر کسی شکل مستقیم الاضلاع اب ص د ی کے کسی زاویہ د سے سامنے کے زاویوں تک خط مستقیم کھینچے جائیں تو ظاہر ہی کہ وہ شکل اُتنے مثلثوں میں تقسیم ہو جائیگی جو گنتی میں اُس شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دو کم ہیں



چونکہ مثلث کے تینوں زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

اور یہاں اِتنے مثلث ہیں کہ اُنکی تعداد شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دو کم ہی

اسلئے اِن مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں اُتنے قائموں کے جو گنتی میں شکل کے ضلعوں کی تعداد کے دونے سے چار کم ہیں

لیکن اِن مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویوں داخلہ کے

اسلئے شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلہ ملکر برابر ہیں اُتنے قائموں کے جو گنتی میں اُسکے

شکل کے ضلعوں کی تعداد کے دونے سے چار کم ہیں

اسلئے شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلے اور چار قائمے ملکر برابر ہیں اتنے قائموں کے
جو گنتی میں اس شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دونے ہیں

اس نتیجہ صریح کی مدد سے ہر مستقیم الاضلاع منتظم (مستقیم الاضلاع جسکے سب ضلعے اور زاویے
آپسمیں برابر ہیں) کے زاویہ کی مقدار دریافت ہو سکتی ہے اگر اسکے ضلعوں کی تعداد معلوم ہو

نتیجہ صریح ۲ ہر شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے خارجے جو اس شکل
کے ضلعوں کو ایک دوسرے کے بعد ایک ہی سمت میں بڑھانے سے پیدا ہوتے
ہیں ملکر برابر چار قائموں کے ہوتے ہیں

چونکہ ہر زاویہ داخلہ مثلاً ا ب س معہ اپنے پاس کے
زاویہ خارجہ ا ب د کے برابر دو قائموں کے ہے شکل ۱۳ س
اسلئے سب زاویے داخلے معہ اپنے پاس کے زاویوں خارجہ کے برابر ہیں اتنے قائموں
کے جو گنتی میں شکل مستقیم الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد سے دونے ہیں لیکن پہلے
اوپر کے نتیجہ صریح سے ثابت ہے کہ شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلے اور چار قائمے
ملکر برابر ہیں اتنے قائموں کے جو گنتی میں اس شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دونے ہیں
اسلئے سب زاویے داخلے اور سب زاویے خارجے ملکر برابر ہیں سب زاویوں داخلہ
اور چار قائموں کے علوم متعارفہ ۱

ان برابروں میں سے زاویے داخلہ نکال ڈالو
اسلئے سب زاویے خارجے برابر ہیں چار قائموں کے علوم متعارفہ ۳

اس نتیجہ صریح کی مدد سے مستقیم الاضلاع منتظم کے ضلعوں کی تعداد دریافت ہو سکتی ہے اگر اسکے
ایک زاویہ کی مقدار معلوم ہو

یہہ دونوں نتیجے صریح تمن صاحب نے زیادہ کئے ہیں اور نتیجہ صریح میں بیان کرنا چاہئے تھا کہ

شکل مستقیم الاضلاع کے زاویہ خارجہ سے کیا مراد ہی اگر اس نقطہ سے جہاں مستقیم الاضلاع کے دو ضلعے ملتے ہیں اُن ضلعوں میں سے کوئی ضلع بڑھایا جائے تو زاویہ جو اس ضلع کے بڑھے ہوئے حصہ اور دوسرے ضلع سے بنیگا شکل مستقیم الاضلاع کا زاویہ خارجہ ہوگا دو ضلعوں میں سے کوئی سا ضلع بڑھایا جاے ایک ہی بات ہی کیونکہ زاویے جو اسطرح بنینگے دونوں آپسمیں تیرہویں شکل سے برابر ہونگے اقلیدس نے انھیں شکل مستقیم الاضلاع کا بیان کیا ہی جنکے سب زاویوں کا رُخ اندر کی طرف ہی ایک اور قسم کی شکل مستقیم الاضلاع بھی ایسی بن سکتی ہی کہ اسمیں زاویہ اف س کا رخ باہر کی طرف ہی لیکن یہہ زاویہ شکل اف س د ی کا زاویہ داخلہ نہیں ہی اس زاویہ کے عیوض اس شکل میں زاویہ داخلہ وہ زاویہ ہی جو چار قائموں سے بقدر زاویہ اف س کم ہی ایسے زاویہ داخلہ کو جو دو قائموں سے بڑا ہی زاویہ مکررہ کہتے ہیں بتیسویں شکل کا پہلا نتیجہ صحیح تو اُن شکلوں میں بھی جنمیں ایک زاویہ یا کئی زاویے داخلہ مکررہ ہیں ثابت ہوسکتا ہی لیکن دوسرا نتیجہ صحیح ایسی شکلوں میں نہیں ثابت ہوسکتا اگر کسی شکل مستقیم الاضلاع اف س د ی کا ایک زاویہ داخلہ مکررہ ہو تو اس [illegible] ملانے اور اُسکو س کیطرف بڑھانے سے ثابت ہو جائیگا کہ زاویے م اف اور ہ س د اور ک د ی اور ل ی ا ملکر چار قائموں سے بقدر زاویہ ج ف س زیادہ ہیں

بتیسویں شکل سے اور بھی کئی ظاہر نتیجے نکلتے ہیں اور وہ یہہ ہیں

۳ اگر مثلث کے دو زاویوں کی مقدار معلوم ہی تو تیسرے زاویہ کی مقدار بھی معلوم ہی کیونکہ تینوں زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں

۴ اگر مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہی تو باقی دو زاویے ملکر برابر ایک قائمہ کے ہیں اور اگر مثلث کے دو زاویے ملکر برابر ہیں اُسکے تیسرے زاویہ کے تو تیسرا زاویہ قائمہ ہی

۵ اگر مثلث کے دو زاویے ملکر اُسکے تیسرے زاویہ سے چھوٹے ہیں تو تیسرا زاویہ منفرجہ ہی اور اگر بڑے ہیں تو تیسرا زاویہ حادہ ہی

۶ مثلث متساوی الاضلاع کا ہر ایک زاویہ دو قائموں کی ایک تہائی یعنی ایک قائمہ کی دو تہائی ہی اس نتیجہ صریح کی مدد سے زاویہ قائمہ کے تین برابر حصے ہوسکتے ہیں

۷ اگر مثلث متساوی الساقین کے راس کا زاویہ قائمہ ہی تو باقی دو زاویوں میں سے ہر ایک آدھا قائمہ ہی

۸ اگر کسی مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہیں تو اُس مثلث کا تیسرا زاویہ بھی دوسرے مثلث کے تیسرے زاویہ کی برابر ہی

۹ شکل ذو اربعۃ الاضلاع کے سب زاویے ملکر برابر چار قائموں کے ہیں یہہ نتیجہ اقلیدس کے پہلے نتیجہ کی ایک خاص صورت ہی لیکن چونکہ اسکا کام اکثر جگہوں پر آیا ہی اسلئے یاد رکھنے کے لایق ہی

مشق

۱ اگر مثلث متساوی الساقین کے قاعدوں کے سروں سے اُسکی ساقوں پر عمود گرائے جائیں تو اُن زاویوں میں سے جو یہہ عمود قاعدہ کے ساتھہ پیدا کریں گے ہر ایک راس کے زاویہ سے آدھا ہوگا

۲ کسی مثلث ا ب س کے ضلعوں پر باہر کی طرف مثلث متساوی الاضلاع ب س د اور س ا ی اور ا ب ف بنائے گئے ہیں ثابت کرو کہ خط مستقیم ا د اور ب ی اور س ف سب آپس میں برابر ہیں

۳ مثمن منتظم کے ایک زاویہ کی مقدار بتاؤ (آٹھہ ضلعے والی شکل کو مثمن کہتے ہیں)

۴ ایک شکل مستقیم الاضلاع منتظم کا ایک زاویہ برابر اڈیڑھ قائمہ کے ہی یہہ بتاؤ کہ اُس شکل میں کتنے ضلعے ہیں

۵ دو دیے ہوئے نقطوں سے ایسے دو خط مستقیم کھینچو کہ وہ ایک خط مستقیم کے ساتھہ جسکا مقام دیا ہوا ہی ایک مثلث متساوی الاضلاع بناویں یہہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں مثلث متساوی الاضلاع نہ بن سکیگا

۶ اگر دو خط مستقیم کسی مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے اوپر کے زاویوں کو دو دو برابر حصوں

میں تقسیم کریں اور وہ خط بڑھکر کسی نقطہ پر ایک دوسرے سے ملیں تو ثابت کرو کہ زاویہ جو اُن خطوں کے ملنے سے پیدا ہوگا مثلث متساوی الساقین کے زاویہ خارجہ کے برابر ہوگا

۷ مثلث متساوی الساقین اب س کا راس ا ہی اور ب ا نقطہ د تک اتنا بڑھایا گیا ہی کہ ا د برابر ب ا کے ہی اور س د کھینچا گیا ہی ثابت کرو کہ ب س د زاویہ قائمہ ہی

۸ دو خط مستقیم ب د اور س د کسی مثلث اب س کے زاویوں خارجہ ب اور س کے دو دو برابر حصے کرتے ہیں اور نقطہ د پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ زاویہ ب د س اور آدھا زاویہ ب ا س ملکر ایک قائمہ ہی

۹ ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ کہ اُسکے راس کا زاویہ اُسکے قاعدہ کے اوپر کے ہر ایک زاویہ سے چوگنا ہو

۱۰ مثلث اب س کا ضلع ب س نقطہ ی پر اور ضلع اب نقطہ ج پر دو برابر حصوں میں تقسیم ہوتا ہی ای نقطہ ف تک اتنا بڑھایا گیا ہی کہ ی ف برابر ہی ای کے اور س ج نقطہ ہ تک اتنا بڑھایا گیا ہی کہ ج ہ برابر ہی س ج کے تو ثابت کرو کہ ف ب اور ہ ب ایک ہی خط مستقیم میں ہیں

۱۱ ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ کہ اُسکے قاعدہ کے اوپر کے ہر ایک زاویہ کی تہائی اُسکے راس کے زاویہ کے آدھے کے برابر ہو

۱۲ اب اور اس دو خط مستقیم ہیں جنکا مقام دیا ہوا ہی ان خطوں میں ایسے دو نقطے ع اور ف دریافت کرو کہ اگر ع ف ملائیں تو اع اور ع ف ملکر ایک دیے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہوں اور اُنکے درمیان کا زاویہ ایک دیے ہوئے زاویہ کی برابر ہو

۱۳ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے سِروں سے راس سے دو سمت میں ایسے دو خط مستقیم کھینچے گئے ہیں کہ اُنمیں سے ایک قاعدہ کے ساتھ ایسا زاویہ بناتا ہی کہ وہ مثلث کے برابر زاویوں میں سے ہر ایک کا تہائی ہی اور یہہ خط اور مثلث کے ضلعے بڑھکر آپسمیں ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ تین مثلث جو قاعدہ کے نیچے پیدا ہوں گے متساوی الساقین ہوں گے

۱۴ دو خط مستقیم ا ی ب اور س ی د نقطہ ی پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور خط مستقیم ا س اور د ب دو مثلث ا س ی اور ب ی د بناتے ہوئے کھچے ہیں اور زاویے ا س ی اور د ب ی خط مستقیم س ف اور ب ف سے جو نقطہ ف پر ملتے ہیں دو دو برابر حصّوں میں تقسیم ہوئے ہیں ثابت کرو کہ زاویے ی ا س اور ی د ب ملکر زاویہ س ب ف سے دونے ہیں

۱۵ اگر مثلث کے کسی زاویہ سے اُس زاویہ کے سامنے کے ضلع کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک خط مستقیم کھینچا جائے تو وہ خط مستقیم اُس ضلع کے آدھے کے برابر ہوگا یا اُسکے آدھے سے بڑا یا چھوٹا ہوگا مطابق اِسکے کہ زاویہ جس سے خط کھینچا گیا ہی قائمہ یا حادہ یا منفرجہ ہی

۱۶ مثلث کا کوئی زاویہ قائمہ یا حادہ یا منفرجہ ہوگا مطابق اِسکے کہ خط مستقیم جو اُس زاویہ سے اُسکے سامنے کے ضلع کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک کھینچا جائے اُس ضلع کے آدھے کے برابر ہی یا اُسکے آدھے سے بڑا یا چھوٹا ہی

۱۷ مثلث ا ب س کے زاویہ ا سے اُسکے سامنے کے ضلع پر ایک عمود گرایا گیا ہی اور یہہ عمود اُس ضلع یا اُس ضلع کے بڑھے ہوئے حصہ سے نقطہ د پر ملتا ہی اور زاویہ ب سے اُسکے سامنے کے ضلع پر ایک عمود گرایا گیا ہی اور یہہ عمود اُس ضلع یا اُس ضلع کے بڑھے ہوئے حصہ سے نقطہ ی پر ملتا ہی تو دو خط مستقیم جو نقطوں د اور ی سے قاعدہ ا ب کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک کھینچے جائینگے آپسمیں برابر ہونگے

۱۸ کسی مثلث کے قاعدہ کے زاویوں سے اُن کے سامنے کے ضلعوں پر عمود گرائے گئے ہیں اور یہہ عمود اُن ضلعوں یا اُن کے بڑھے ہوئے حصّوں سے ملتے ہیں تو وہ خط مستقیم جو اُن نقطوں کے درمیان جہاں عمود ضلعوں یا ضلعوں کے بڑھے ہوئے حصّوں سے ملتے ہیں کھینچا جائے اُس عمود سے جو قاعدہ کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے اُس خط پر گرایا جائے دو برابر حصّوں میں تقسیم ہوگا

۱۹ پہلے مقالہ کی پہلی شکل میں دائرے نقطوں س اور ہ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور ا ب بڑھکر ایک دائرہ سے نقطہ ك پر ملتا ہی تو ثابت کرو کہ س ہ ك مثلث متساوی الاضلاع ہی

۲۰ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ پر کے زاویوں کو دو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنیوالے خط مستقیم مثلث کے ضلعوں سے نقطوں د اور ی پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ دی مثلث کے قاعدہ کا متوازی ہی

۲۱ اب اور اس دو دیے ہوئے خط مستقیم ہیں اور اب میں ایک نقطہ ع دیا ہوا ہی ع سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ اس سے نقطہ ف پر ملکر زاویہ اع ف زاویہ اف ع سے تگنا بناوے

۲۲ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکے دو ضلعوں کا جوڑا اور وتر معلوم ہی

۲۳ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکے دو ضلعوں کا فرق اور وتر معلوم ہی

۲۴ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکا وتر اور عمود جو وتر پر زاویہ قائمہ سے گرا ہی معلوم ہی

۲۵ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکے تینوں ضلعوں کا جوڑا اور جسکا ایک زاویہ معلوم ہی

۲۶ زاویہ قائمہ کے تین برابر حصے کرو

۲۷ ایک محدود خط مستقیم کے تین برابر حصے کرو

۲۸ دیے ہوئے نقطہ سے دو متوازی خط مستقیم تک ایسے دو برابر خط مستقیم کھینچو کہ وہ ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہوں

۲۹ مثلث جسکے تینوں ضلعوں کا جوڑ معلوم ہی ایسا بناؤ کہ اسکے زاویہ کسی دیے ہوئے مثلث کے زاویوں کے برابر ہوں

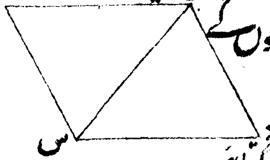
۳۰ مثلث اب س کے زاویہ خارجہ ب س د کو خط مستقیم س ی اور زاویہ داخلہ ب اس کو خط مستقیم ا ی دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہی اور یہہ دونوں خط نقطہ ی پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ زاویہ ا ی س زاویہ اب س کا آدھا ہی

شکل ۳۳

خط مستقیم جو دو برابر اور متوازی خط مستقیم کے ایک ایک طرف کے سروں

کو ملاتے ہیں آپسمیں برابر اور متوازی ہوتے ہیں

فرض کرو کہ اب اور س د دو برابر اور متوازی خط مستقیم ہیں اور اُنکے ایک ایک طرف کے سروں کو خط مستقیم اس اور ب د ملاتے ہیں



تو اس اور ب د آپسمیں برابر اور متوازی ہونگے

ب س ملاؤ

چونکہ اب متوازی ہی س د کا اور ب س اُسپر گرتا ہی

اسلئے زاویہ اب س برابر ہی زاویہ متبادلہ ب س د کے　　شکل ۲۹

اور چونکہ اب برابر ہی س د کے اور ب س دو مثلث اب س اور د س ب میں مشترک ہی یعنی دو ضلعے اب اور ب س الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں د س اور س ب کے اور زاویہ اب س برابر زاویہ د س ب کے ثابت ہو چکا ہی

اسلئے قاعدہ اس برابر ہی قاعدہ ب د کے اور مثلث اب س برابر ہی مثلث د س ب کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے برابر ہیں دوسرے مثلث کے باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپسمیں برابر ہیں جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں　　شکل ۴

اسلئے زاویہ اس ب برابر ہی زاویہ س ب د کے

اور چونکہ خط مستقیم ب س دو خط مستقیم اس اور ب د پر گر کر اُنکے ساتھ برابر زاویے تبادلہ اس ب اور س ب د بناتا ہی

اسلئے اس متوازی ہی س د کا　　شکل ۲۷

اور اس برابر ب د کے ثابت ہو چکا ہی

اسلئے خط مستقیم جو دو برابر اور متوازی خط مستقیم کے الخ ۔ یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل میں یہ شرط کہ خط مستقیم ایک ایک طرف کے سروں کو ملاتے ہیں ضروری ہی کیونکہ

اگر یہہ شرط نہو تو شبہہ پڑیگا کہ آیا خط مستقیم اس اور ب د نقطوں ا اور س کو اور ب اور د کو ملاتے ہیں یا خط مستقیم اد اور ب س نقطوں ا اور د کو اور ب اور س کو ملاتے ہیں

اس شکل سے یہہ نتیجہ صاف ظاہر ہے کہ اگر کسی شکل ذوار بعۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے دو ضلعے برابر اور متوازی ہوں تو وہ شکل متوازی الاضلاع ہوگی

مشق

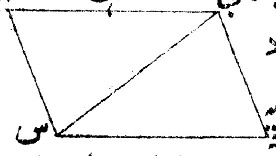
اگر کوئی خط مستقیم جو دو غیر متوازی برابر خط مستقیم کے ایک ہی طرف کے سروں کو ملاتا ہے اُن خطوں کے ساتھہ اپنی ایک طرف میں برابر زاویے پیدا کرے تو ثابت کرو کہ ان خطوں کے دوسری طرف کے سروں کو ملانیوالا خط مستقیم متوازی پہلے خط مستقیم کا ہوگا

۲ مثلث کے قاعدہ کے سروں سے جو خط مستقیم سامنے کے ضلعوں تک کھینچے جائیں وہ کسی صورت میں ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں نہ کاٹیں گے

شکل ۳۴ اثباتی

متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعے اور زاویے آپسمیں برابر ہوتے ہیں اور قطر اُسکو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے

فرض کرو کہ اب دس متوازی الاضلاع ہے اور ب س اُسکا قطر ہے



تو اب برابر ہوگا س د کے اور اس برابر ب د کے اور زاویہ اب د برابر زاویہ اس د کے اور زاویہ ب اس برابر زاویہ ب دس کے اور قطر ب س متوازی الاضلاع اب دس کے دو برابر حصے کریگا

چونکہ اب متوازی س د کا ہے اور ب س اُنپر گرتا ہے

اسلیئے زاویہ اب س برابر ہے زاویہ متبادلہ ب س د کے　　شکل ۲۹

اور چونکہ اس متوازی ہے ب د کا اور ب س اُنپر گرتا ہے

شکل ۲۹ اسلئے زاویہ اس ب برابر ہی زاویہ تبادلہ س ب د کے

اب چونکہ دو مثلث اب س اور د ب س میں ایک مثلث کے دو زاویے اب س اور ب س الگ الگ برابر ہیں دوسرے مثلث کے دو زاویوں س ب د اور س ب د کے اور ضلع ب س دونوں مثلثوں میں مشترک ہی

اسلئے باقی ضلعے ان مثلثوں کے الگ الگ برابر ہیں اور ایک مثلث کا تیسرا زاویہ برابر دوسرے مثلث کے تیسرے زاویہ کے یعنی ضلع اب برابر ہی ضلع س د کے اور ضلع اس برابر ب د کے اور زاویہ ب اس برابر زاویہ ب د س کے

شکل ۲۶

پھر چونکہ زاویہ اب س برابر زاویہ ب س د کے ہی اور زاویہ س ب د برابر زاویہ اس ب کے ہی

علوم متعارفہ ۲ اسلئے کل زاویہ اب د برابر ہی کل زاویہ اس د کے

اور زاویہ ب اس برابر زاویہ ب د س کے ثابت ہو چکا ہی

اسلئے متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعے اور زاویے آپسمیں برابر ہوتے ہیں اور قطر متوازی الاضلاع کے دو برابر حصے کرتا ہی

چونکہ اب برابر ہی س د کے اور ب س مشترک ہی یعنی دو ضلعے اب اور ب س الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں د س اور س ب کے

اور زاویہ اب س برابر زاویہ ب س د کے ثابت ہو چکا ہی

شکل ۴ اسلئے مثلث اب س برابر ہی مثلث د س ب کے

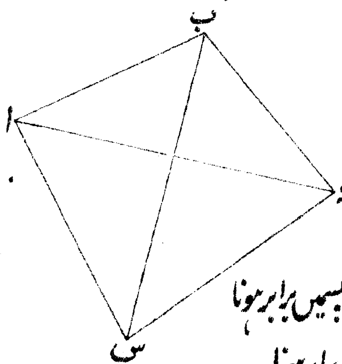
اسلئے قطر ب س متوازی الاضلاع اب د س کے دو برابر حصے کرتا ہی یہی ثابت کرنا تھا

اگر اس شکل میں دوسرا قطر بھی کھینچا جاوے تو ثابت ہو سکتا ہی کہ دونوں قطر ایک دوسرے

کے دو برابر حصے کریں گے اگر متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہی تو اُسکے سب زاویے قائمے ہوں گے اور دونوں قطر آپسمیں برابر ہوں گے اور اگر متوازی الاضلاع مربع یا معین ہی تو اُسکے قطر ایک دوسرے کے دو برابر حصے کریں گے اور ایک دوسرے کے ساتھہ زاویے قائمے بنائیں گے طالب علم کو چاہئیے کہ ان باتوں کو ثابت کرکے یاد رکھے کیونکہ یہہ بڑے کام کی باتیں ہیں

اِس شکل میں تین شکل شامل ہیں پہلے یہہ کہ "متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعے برابر ہوتے ہیں" دوسرے یہہ کہ "متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے زاویے برابر ہوتے ہیں" تیسرے یہہ کہ "متوازی الاضلاع کا ہر قطر اُسکے دو برابر حصے کرتا ہی" اِن تینوں شکلوں کے عکس یعنی "اگر کسی ذو اربعۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعے یا آمنے سامنے کے زاویے آپسمیں برابر ہوں یا ذو اربعۃ الاضلاع کا ہر قطر اُسکے دو برابر حصے کرتا ہو تو وہ ذو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوگی" اُقلیدس نے نہیں ثابت کئے ہیں یہہ عکس ہر حالت میں صحیح ہیں طالب علم کو چاہئے کہ اِن کو ثابت کرکے یاد رکھے

اگر کسی شکل ذو اربعۃ الاضلاع اب د س میں جسکے وتر اد اور ب س ہیں نیچے لکھی ہوئی ذیل خاصیتوں میں سے کوئی دو خاصیتیں پائی جاویں تو ثابت ہوسکتا ہی کہ وہ شکل متوازی الاضلاع ہوگی



۱ اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا

۲ اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا

۳ اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا

۴ اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا

۵ زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا

۶ زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا

۷ ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

۸ اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

۹ ا د سے ذوا ربعۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصّوں میں تقسیم ہونا

۱۰ ب س سے ذوا ربعۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصّوں میں تقسیم ہونا

جب اِن دس خاصیتوں میں سے تم دو دو کی ترتیب لو گے تو یہہ پینتالیس ترتیبیں پیدا ہوں گی

۱ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
ا س اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا}

۲ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا}

۳ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
ا س اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا}

۴ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
زاویوں ب ا س اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا}

۵ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا}

۶ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
ب س کا ا د کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرنا}

۷ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
ا د کا ب س کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرنا}

۸ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
ا د سے ذوا ربعۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصّوں میں تقسیم ہونا}

۹ {اب اور س د کا آپسمیں متوازی ہونا
ب س سے ذوا ربعۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصّوں میں تقسیم ہونا}

۱۰ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا }

۱۱ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا }

۱۲ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا }

۱۳ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا }

۱۴ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
ب س کا اد کو دو برابر حصتوں میں تقسیم کرنا }

۱۵ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
اد کا ب س کو دو برابر حصتوں میں تقسیم کرنا }

۱۶ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
اد سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصتوں میں تقسیم ہونا }

۱۷ { اس اور ب د کا آپسمیں متوازی ہونا
ب س سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصتوں میں تقسیم ہونا }

۱۸ { اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا }

۱۹ { اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا
زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا }

۲۰ { اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا
زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا }

٢١
اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا
ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

٢٢
اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا
اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

٢٣
اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا
اد سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

٢٤
اب اور س د کا آپسمیں برابر ہونا
ب س سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

٢٥
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا
زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا

٢٦
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا
زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا

٢٧
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا
ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

٢٨
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا
اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

٢٩
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا
اد سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

٣٠
اس اور ب د کا آپسمیں برابر ہونا
ب س سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

٣١
زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا
زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا

۳۲	زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
۳۳	زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
۳۴	زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا اد سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
۳۵	زاویوں ب اس اور س د ب کا آپسمیں برابر ہونا ب س سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
۳۶	زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
۳۷	زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
۳۸	زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا اد سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
۳۹	زاویوں اب د اور د س ا کا آپسمیں برابر ہونا ب س سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
۴۰	ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
۴۱	ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا اد سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
۴۲	ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا ب س سے ذوار بعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

۴۳
اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
اد سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

۴۴
اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
ب س سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

۴۵
اد سے ذو اربعۃ اضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
ب س سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

اگر ان پینتالیس (۴۵) ترتیبوں میں سے کوئی ترتیب دو خاصیتوں کی ذو اربعۃ الاضلاع میں پائی جائیں گی تو ثابت ہو سکتا ہے کہ باقی آٹھ خاصیتیں بھی ذو اربعۃ الاضلاع میں ہوں گی اسلئے پینتالیس ترتیبوں سے پینتالیس شکلیں بن سکتی ہیں اور چونکہ ان پینتالیس شکلوں میں سے ہر ایک کے تالی میں آٹھ باتیں ہونگی اسلئے ہر ایک شکل سے آٹھ شکلیں جنکے تالی میں ایک ایک بات ہو بن سکیں گی یعنی پینتالیس شکلوں سے تین سو ساٹھ (۳۶۰) شکلیں پیدا ہوں گی یہہ بھی یاد رکھنا چاہیئے کہ جو شکلیں تیسری اور دسویں اور پندرھویں اور اٹھائیسویں اور بیالیسویں اور پینتالیسویں ترتیبوں سے پیدا ہوں گی ہر حالت میں وہ صحیح نہوں گی طالب علم کو چاہیے کہ ان سب شکلوں کو تیار کر کر ثابت کرے

چونتیسویں شکل کی مدد سے ہم ہر ایک محدود خط مستقیم کو جتنے برابر حصوں میں چاہیں اسطرح تقسیم کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ اب دیا ہوا محدود خط مستقیم ہے خط اس کھینچو جو خط اب کے ساتھ کوئی زاویہ بناوے

اور اس خط میں سے کوئی حصہ اد لے لو اور اد کی برابر حصے دی اور ی س لگاتار بناتے جاؤ یہانتک کہ یہہ سب حصے اُتنے ہو گئے ہیں جتنے حصوں میں ہم دیے ہوئے خط اب کو تقسیم کرنا چاہتے ہیں

س ب کو ملاؤ اور ی ج اور د ف متوازی س ب کے کھینچو

تو خط مستقیم اب اُتنے حصوں میں تقسیم ہو جائیگا جتنے حصوں میں ہم چاہتے ہیں

دہ اور ی ک متوازی اب کے کھینچو

چونکہ د ہ اور ی ک اور اب آپسمیں متوازی ہیں — شکل ۳

اسلئے زاویے س ی ک اور ی د ہ اور د اف سب آپسمیں برابر ہیں — شکل ۹

اور چونکہ س ک اور ی ہ اور د ف آپسمیں متوازی ہیں — شکل ۳

اسلئے زاویے ی س ک اور د ی ہ اور ا د ف سب آپسمیں برابر ہیں — شکل ۹

اور ی س اور د ی اور ا د برابر بنائے گئے ہیں

اسلئے ی ک اور د ہ اور اف آپسمیں برابر ہیں — شکل ۲۶

اور چونکہ ی ک برابر ہے ج ب کے اور د ہ برابر ف ج کے — شکل ۳۴

اسلئے ج ب اور ف ج اور اف آپسمیں برابر ہیں — علوم متعارفہ ا

مشق

۱ اگر کسی ذوارابعۃ الاضلاع کے دو ضلعے متوازی ہوں اور باقی دو ضلعے برابر ہوں لیکن متوازی نہوں تو اُسکے ہر ایک دو آمنے سامنے کے زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے

۲ اگر کسی متوازی الاضلاع کے دو آمنے سامنے کے زاویوں کو ملانیوالا خط مستقیم اُن زاویوں کو دو دو برابر حصے کرے تو اس متوازی الاضلاع کے چاروں ضلعے آپسمیں برابر ہو گے

۳ دیے ہوئے نقطہ سے ایک ایسا خط کھینچو کہ اُسکا وہ حصہ جو دو دیے ہوئے متوازی خطوں کے درمیان ہو ایک دی ہوئی لمبائی کا ہو

۴ خط مستقیم جو کسی متوازی الاضلاع کے دو متصل کے زاویوں کے دو دو برابر حصے کرتے ہیں زاویہ قائمہ بناتے ہوئے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں

۵ متوازی الاضلاع کے دو آمنے سامنے کے زاویوں کو دو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنیوالے خط مستقیم یا تو متوازی ہوتے ہیں یا ایک دوسرے کو ڈھک لیتے ہیں

۶ اگر کسی متوازی الاضلاع کے قطر آپسمیں برابر ہوں تو اُسکے سب زاویے بھی آپسمیں برابر ہوں گے

۷ ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اگر اُس سے دو دیے ہوئے خط مستقیم پر عمود گرائے جائیں تو وہ عمود دو اور دیے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہوں - اور بتلاؤ ایسے کتنے نقطے دریافت ہو سکتے ہیں

۸ ایک ایسا خط مستقیم کھینچو جو ایک خط مستقیم کے برابر ہو اور دوسرے خط مستقیم کا متوازی ہو اور اُسکے سرے دو اور دیے ہوئے خط مستقیم پر ہوں

۹ متوازی الاضلاع ا ب س د کے ضلعوں ا ب اور ب س اور س د پر مثلث تساوی الاضلاع اسطرح بنائے گئے ہیں کہ ب س پر اُسی طرف جسطرف متوازی الاضلاع ہے اور ا ب اور س د پر سامنے کی طرف میں تو ثابت کرو کہ ا ب اور س د پر کے مثلثوں کے راسوں کی دوریاں اُس مثلث کے راس سے جو ب س پر بنا ہے الگ الگ برابر ہیں متوازی الاضلاع کے قطر ا س اور ب د کے

۱۰ اگر کسی متوازی الاضلاع کا زاویہ زیادہ ہوتا جائے لیکن اُن ضلعوں کی لمبائی جن سے وہ زاویہ بنا ہے نہ بڑھے تو قطر جو اُس زاویہ کی راس میں ہو کر گذرتا ہے کم ہوتا جائیگا

۱۱ ا اور ب اور س تین ایسے نقطے ایک خط مستقیم میں ہیں کہ ا ب برابر ب س کے ہے تو ثابت کرو کہ عمود جو ا اور س سے کسی خط مستقیم پر جو ا اور س کے درمیان نہ گذرتا ہو گرائے جائیں دونوں ملکر دونے ہوں گے اُس عمود کے جو ب سے اُس خط پر گرایا جاے -

۱۲ اگر متوازی الاضلاع کے زاویوں سے کسی خط مستقیم پر جو متوازی الاضلاع کے باہر ہو عمود گرائے جائیں تو دو عمود جو آمنے سامنے کے زاویوں سے گریں گے ملکر برابر ہوں گے اُن دو عمود کے جو دوسرے دو آمنے سامنے کے زاویوں سے گریں گے

۱۳ اگر چھ ضلعے ایک مستقیم الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعے آپسمیں برابر اور متوازی ہوں تو تینوں خط مستقیم جو آمنے سامنے کے ضلعوں کو ملائیں گے آپسمیں ایک ہی نقطہ پر کاٹیں گے

۱۴ ا ب اور ا ص دو دیے ہوئے خط مستقیم ہیں اور اُنکے درمیان ی دیا ہوا نقطہ ہے ی سے ایسا خط مستقیم ج ی ہ کھینچو کہ اُسکا حصہ ج ہ جو دیے ہوئے خطوں کے درمیان ہو نقطہ ی پر دو برابر ٹکڑوں میں تقسیم ہو

۱۵ دیے ہوئے متوازی الاضلاع کے اندر ایک ایسا معین بناؤ کہ اُسکے ایک زاویہ کا راس متوازی الاضلاع کے ایک ضلع کے دیے ہوئے نقطہ پر ہو

۱۶ اب س د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ی اور ف ضلعوں اد اور ب س کے بیچوں بیچ کے نقطے ہیں ثابت کرو کہ ب ی اور د ف قطر اس کو تین برابر حصوں میں تقسیم کریں گے

۱۷ سطح متوازی الاضلاع کو اُسکے ایک ضلع کے ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچکر دو برابر حصوں میں تقسیم کرو

شکل ۳۵ اثباتی

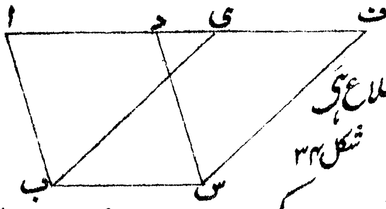
متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوتی ہیں آپسمیں برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع اب س د اور ی ب س ف ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س او اف کے درمیان ہیں تو متوازی الاضلاع اب س د اور ی ب س ف آپسمیں برابر ہوں گی

اگر متوازی الاضلاع اب س د اور د ب س ف کے ضلعے اد اور د ف جو قاعدہ ب س کے سامنے ہیں ایک ہی نقطہ د پر ختم ہوں تو ظاہر ہے کہ ہر متوازی الاضلاع مثلث ب د س کی دونی ہوگی

اسلئے متوازی الاضلاع اب س د برابر ہوگی متوازی الاضلاع د ب س ف کے علوم متعارفہ ۶

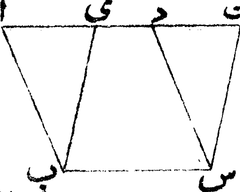
لیکن اگر متوازی الاضلاع اب س د اور ی ب س ف کے ضلعے اد اور ی ف جو قاعدہ ب س کے سامنے ہیں ایک ہی نقطہ پر



نہیں ختم ہوتے ہیں

تو چونکہ اب س د متوازی الاضلاع ہے

اسلئے اد برابر ہے ب س کے — شکل ۳۴



اور اسی وجہ سے ی ف برابر ہے ب س کے

اسلئے اد برابر ہے ی ف کے — علوم متعارفہ ۱

اور د ی مشترک ہے

اسلئے کل یا باقی ای برابر ہے کل یا باقی د ف کے — علوم متعارفہ ۲ یا ۳

اور اب برابر ہے د س کے

اب مثلث ی اب اور ف د س میں

چونکہ ف د برابر ہے ی ا کے اور د س برابر اب کے

اور زاویہ خارجہ ف د س برابر ہے اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ی اب کے — شکل ۲۹

اسلئے مثلث ف د س برابر ہے مثلث ی اب کے

منحرف اب س ف میں سے مثلث ف د س نکال ڈالو

اور اسی منحرف میں سے مثلث ی اب کو نکال ڈالو

تو جو شکلیں باقی رہیں گی وہ آپسمیں برابر ہوں گی — علوم متعارفہ ۳

اسلئے متوازی الاضلاع اب س د برابر ہے متوازی الاضلاع ی ب س ف

کے اسلئے متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور الخ ۔ یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کی تینوں صورتیں ایک ہی طور پر اسطرح ثابت ہو سکتی ہیں

فرض کرو کہ اب س د اور ی ب س ف ایک ہی قاعدہ ب س اور ایک ہی متوازی

خطوں ب س اور اف کے درمیان ہیں (پہلی صورت میں د اور ی ایک ہی نقطہ ہے)

تو متوازی الاضلاع اب س د برابر ہوگی متوازی الاضلاع ی ب س ف کے

چونکہ اف دو متوازی خطوں اب اور دس پر گرتا ہی

اسلیئے زاویہ خارجہ ف د س برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلی اب کے — شکل ۲۹

اور چونکہ اف دو متوازی خطوں ی ب اور ف س پر گرتا ہی

اسلیئے زاویہ خارجہ ای ب برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ د ف س کے — شکل ۲۹

اب مثلث ف د س اور ی اب میں

چونکہ زاویہ ف د س برابر ہی زاویہ ی اب کے اور زاویہ د ف س برابر زاویہ ای ب کے اور ضلع د س برابر ضلع اب کے

اسلیئے مثلث ف د س سب طرح برابر ہی مثلث ی اب کے — شکل ۲۶

شکل اب س ف میں سے مثلث ف د س نکال ڈالو

اور پھر اسی شکل میں سے مثلث ی اب نکال ڈالو

تو شکلیں جو باقی رہیں گی آپسمیں برابر ہونگی — علوم متعارفہ ۳

اسلیئے متوازی الاضلاع اب س د برابر ہی متوازی الاضلاع ی ب س ف کے

اسلیئے متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے الخ — یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل میں اور اسکے آگے کی کئی شکلوں میں برابر ہونے سے یہہ مطلب ہی کہ سطحوں کے صرف رقبے برابر ہیں

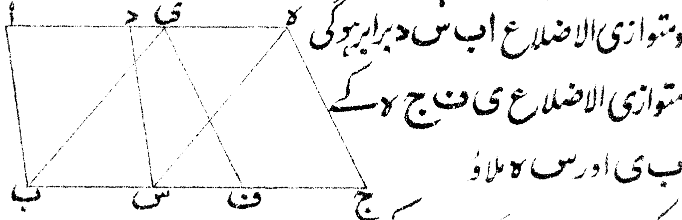
سطحوں کی مساحت یعنی زمین کی پیمایش کی بنیاد اسی شکل پر ہی چونکہ روزمرہ کی کارروائی میں قائم الزوایا کا رقبہ اسکی لمبائی کو چوڑائی کے ساتھ یعنی قاعدہ کو اونچائی کے ساتھ گنا کرنے سے دریافت کیا جاتا ہی اور چونکہ اس شکل سے ثابت ہی کہ جس متوازی الاضلاع کا قاعدہ اور اسکی اونچائی یعنے متوازی خطوں کے درمیان کی سطح کی چوڑائی کسی قائم الزوایا کا قاعدہ اور اسکی اونچائی ہی تو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ اس قائم الزوایا کے رقبہ کے برابر ہی اسلیئے ہر متوازی الاضلاع کا رقبہ اسکے قاعدہ کی لمبائی اور اسکی اونچائی کو آپسمیں گنا کرنے سے دریافت ہوتا ہی

اس شکل کا عکس یعنی دو متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی طرف میں ہوں اور جنکے رقبے آپسمیں برابر ہیں ایک ہی متوازی خطوں کے درمیاں ہوں گے اقلیدس نے نہیں ثابت کیا ہے طالب علم آپ اسکو ثابت کرے

شکل ۳۶ اثباتی

متوازی الاضلاع جو برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیاں ہوتی ہیں آپسمیں برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع اب س د اور ی ف ج ہ برابر قاعدوں ب س اور ف ج پر اور ایک ہی متوازی خطوں ا ہ اور ب ج کے درمیاں ہیں



تو متوازی الاضلاع اب س د برابر ہوگی

متوازی الاضلاع ی ف ج ہ کے

ب ی اور س ہ ملاؤ

چونکہ ب س برابر ہے ف ج کے — فرض

اور ف ج برابر ہے ی ہ کے — شکل ۳۴

اسلئے ب س برابر ہے ی ہ کے — علوم متعارفہ ۱

اور یہہ دونوں آپسمیں متوازی بھی ہیں اور ان خطوں کے ایک ایک طرف کے سروں کو خط مستقیم ب ی اور س ہ ملاتے ہیں

لیکن جو خط مستقیم کسی دو برابر اور متوازی خط مستقیم کے ایک ایک طرف کے سروں کو ملاتے ہیں وہ آپسمیں برابر اور متوازی ہوتے ہیں — شکل ۳۳

اسلئے ب ی اور س ہ آپسمیں برابر اور متوازی ہیں

اسلئے ی ب س ہ متوازی الاضلاع ہے

چونکہ متوازی الاضلاع اب س د اور ی ب س ہ ایک ہی قاعدہ

ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ا ہ کے درمیان ہیں
اسلئے متوازی الاضلاع ا ب س د برابر ہے متوازی الاضلاع ی ب س ہ کے
اسیطرح یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ متوازی الاضلاع ی ف ج ہ برابر ہے متوازی
الاضلاع ی ب س ہ کے
اسلئے متوازی الاضلاع ا ب س د برابر ہے متوازی الاضلاع ی ف ج ہ کے
اسلئے متوازی الاضلاع جو برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی الخ یہی
ثابت کرنا تھا

اس شکل کا عکس برابر متوازی الاضلاع جو برابر قاعدوں پر جو ایک ہی خط مستقیم میں ہیں اور
ان قاعدوں کے ایک ہی طرف ہیں ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہونگی ثابت کرو

اس شکل اور چھتیسویں شکل کا دوسرا عکس بھی یعنی برابر متوازی الاضلاع جو ایک ہی متوازی خطوں
کے درمیان ہیں یا تو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر قاعدوں پر ہونگی صحیح ہے اسکو ثابت کرو

یہہ اور چھتیسویں شکل اسطرح بھی بیان کیجاتی ہے متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر
قاعدوں پر ہوتی ہیں اور جنکی اونچائیاں برابر ہوتی ہیں آپسمیں برابر ہوتی ہیں

مشق

۱ اگر کسی شکل ذوذنقہ کے دو متوازی ضلعے ملکر کسی متوازی الاضلاع کے قاعدہ کے دونے
ہوں اور وہ ذوذنقہ اور متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں تو ذوذنقہ
اور متوازی الاضلاع آپسمیں برابر ہونگے

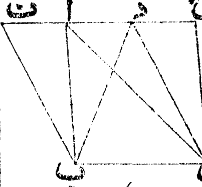
۲ اگر کسی مثلث ا ب س کے ضلعوں ا ب اور ا س پر متوازی الاضلاع ف ب ا ج
اور ہ ا س ک بنائی گئی ہیں اور اُن کے ضلعے ف ج اور ک ہ جو مثلث ا ب س کے
ضلعوں کے متوازی ہیں نقطہ ن پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں یا بڑھکر آپسمیں ملتے ہیں تو
یہہ دونوں متوازی الاضلاع ملکر برابر ہونگے متوازی الاضلاع ب د ی س کے جو مثلث کے

قاعدہ ب س پر بنائی گئی ہی اور جسکا ضلع ب د برابر اور متوازی ا ن کا ہی

شکل ۳۷ اثباتی

جو مثلث ایک ہی قاعدہ پر ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں وہ آپسمیں برابر ہوں گے

فرض کرو کہ مثلث اب س اور د ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں اد اور ب س کے درمیان ہیں



تو مثلث اب س برابر ہوگا مثلث د ب س کے

اد کو دونوں طرفوں ی اور ف تک بڑھاؤ

س سے س ی متوازی اب کا اور ب سے ب ف متوازی س د کا کھینچو — شکل ۳۱

تو اب س ی اور د س ب ف متوازی الاضلاع ہیں — حد ۱

اور چونکہ یہہ متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ ب س اور ایک ہی متوازی خطوں اد اور ب س کے درمیان ہیں

اسلئے متوازی الاضلاع اب س ی برابر ہی متوازی الاضلاع د س ب ف کے — شکل ۳۵

اور مثلث اب س متوازی الاضلاع اب س ی کا آدھا ہی کیونکہ قطر اس متوازی الاضلاع کے دو برابر حصے کرتا ہی — شکل ۳۴

اور مثلث د ب س متوازی الاضلاع د س ب ف کا آدھا ہی کیونکہ قطر د ب متوازی الاضلاع کے دو برابر حصے کرتا ہی — شکل ۳۴

لیکن برابر چیزوں کے آدھے آپسمیں برابر ہوتے ہیں — علوم متعارفہ ۷

اسلئے مثلث اب س برابر ہی مثلث د ب س کے

اسلئے جو مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے الخ — یہی ثابت کرنا تھا

مشق

۱ اب س دیا ہوا مثلث ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اسکا رقبہ دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کے برابر ہو اور اسکا قاعدہ دیا ہوا خط اد جو اب کے مقام پر پڑا ہی ہو

۲ اب س دیا ہوا مثلث ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اسکا راس ب س کے دیے ہوئے نقطہ پر ہو اور اسکا قاعدہ اسی خط مستقیم میں ہو جسمیں اب ہی اور اسکا رقبہ دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کے برابر ہو

۳ اب س دیا ہوا مثلث ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اسکا رقبہ دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کے برابر ہو اور اسکا قاعدہ اسی خط مستقیم میں ہو جسمیں اب ہی اور اسکا راس ایک دیے ہوئے خط میں جو اب کا متوازی ہی ہو

۴ اب س د دی ہوئی ذو اربعۃ الاضلاع ہی اسکے ضلع اب پر ایک ایسی ذو اربعۃ الاضلاع بناؤ کہ اسکا رقبہ دی ہوئی ذو اربعۃ الاضلاع کے برابر ہو اور اسکا ایک ضلع س د کے ایک دیے ہوئے نقطہ میں ہو کر گذرے اور اب کا متوازی ہو

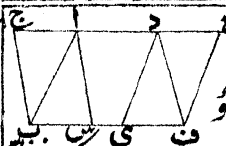
۵ اب س د دی ہوئی ذو اربعۃ الاضلاع ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اسکا قاعدہ اب کی سیدھ میں ہو اور اسکا راس ضلع س د کے دیے ہوئے نقطہ ع پر ہو اور اسکا رقبہ دی ہوئی ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہو

۶ کسی مستقیم الاضلاع کے برابر ایک مثلث بناؤ

شکل ۳۸ اثباتی

جو مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں وہ آپسمیں برابر ہوتے ہیں

فرض کرو کہ مثلث اب س اور د ی ف برابر قاعدوں ب س اور ی ف پر اور ایک ہی متوازی خطوں اد اور ب ف کے درمیان ہیں



تو مثلث اب س برابر ہوگا مثلث دی ف کے

اد کو دونوں طرف ج اور ہ نقطوں تک بڑھاؤ

ب سے ب ج متوازی اس کا اور ف سے ف ہ متوازی دی کا کھینچو شکل ۳۱

تو ج ب س ا اور دی ف ہ میں سے ہر ایک متوازی الاضلاع ہے

اور چونکہ یہہ متوازی الاضلاع برابر قاعدوں ب س اور ی ف پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہیں

اسلئے یہہ متوازی الاضلاع آپسمیں برابر ہیں شکل ۳۶

چونکہ قطر اب متوازی الاضلاع ج ب س ا کے دو برابر حصے کرتا ہے شکل ۳۴

اسلئے مثلث اب س متوازی الاضلاع ج ب س ا کا آدھا ہے

اور چونکہ قطر دف متوازی الاضلاع دی ف ہ کے دو برابر حصے کرتا ہے شکل ۳۴

اسلئے مثلث دی ف متوازی الاضلاع دی ف ہ کا آدھا ہے

لیکن برابر چیزوں کے آدھے آپسمیں برابر ہوتے ہیں علوم متعارفہ

اسلئے مثلث اب س برابر ہے مثلث دی ف کے

اسلئے جو مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کی یہہ صورت کہ برابر قاعدوں پر کے مثلثوں کی راسیں ایک ہی نقطہ پر ہیں بری کار آمد ہے

اس شکل میں یہہ بات مان لی گئی ہے کہ دونوں مثلثوں کے قاعدے ایک ہی سیدھہ میں ہیں اگر شکل میں نقطہ ی نقطہ س پر اور نقطہ د نقطہ ا پر ہو تو ایک مثلث کا زاویہ دوسرے مثلث کے زاویہ کا تتمہ ہوگا اسلئے یہہ نتیجہ ثابت ہوا کہ اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہیں اور ان ضلعوں سے بنے ہوئے زاویے ایک دوسرے کا تتمہ ہیں تو دونوں مثلثوں کے رقبے آپسمیں برابر ہیں

سینتسویں اور اڑتیسویں شکل کو اسطرح بھی بیان کرتے ہیں - مثلث جو ایک ہی قاعدہ

یا برابر قاعدوں پر ہوتے ہیں اور جنکی اونچائیاں برابر ہوتی ہیں آپسمیں برابر ہوتے ہیں

نتیجہ صریح خط مستقیم جو کسی مثلث کے قاعدہ کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے اسکے سامنے کے زاویہ تک کھینچا گیا ہی وہ مثلث کے دو برابر حصے کرتا ہی

مشق

۱ سطح متوازی الاضلاع جن چار مثلثوں میں اپنے قطروں سے تقسیم ہوتی ہی اُن مثلثوں کے رقبے آپسمیں برابر ہونگے

۲ اب س د متوازی الاضلاع ہی اور اسکے قطر ب د کے کسی نقطہ ع سے خط مستقیم ع ا اور ع س کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ع اب اور ع س ب آپسمیں برابر ہیں

۳ اب س ایک مثلث ہی اور د اور ی ضلعوں اب اور اس کے بیچوں بیچ کے نقطے ہیں خط ب ی اور س د نقطہ ف پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ب ف س برابر ذوالاربعۃ الاضلاع ا د ف ی کے ہی

۴ ی اور ف مثلث اب س کے ضلعوں اب اور اس کے بیچوں بیچ کے نقطے ہیں اور ا د قاعدہ ب س پر عمود ہی ثابت کرو کہ زاویہ ی د ف برابر زاویہ ب اس کے ہی اور ذوالاربعۃ الاضلاع ا ی د ف مثلث اب س کی آدھی ہی

۵ ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے آمنے سامنے کی طرفوں میں دو برابر رقبوں کے مثلث واقع ہیں تو ثابت کرو کہ قاعدہ یوں ہی یا بڑھکر اُن مثلثوں کی راسوں کے ملانے والے خط کو دو برابر حصوں میں کاٹتا ہی

۶ تین متوازی الاضلاع جو سبطرح سے آپسمیں برابر ہیں اسطرح سے پاس پاس ملا کر رکھی گئی ہیں کہ اُنکے قاعدے ایک ہی خط مستقیم میں ہیں پہلی متوازی الاضلاع کے قاعدہ کے اور تیسری متوازی الاضلاع کے قاعدہ کے سامنے کے ضلع کے ایک ایک طرف کے سرے ملائے گئے ہیں ثابت کرو کہ یہہ نئی سطح متوازی الاضلاع جو سروں کے ملانے سے

ہی ہی اسکا وہ حصہ جو دوسری سطح متوازی الاضلاع کے درمیان ہی ہر ایک سطح متوازی الاضلاع سے آدھا ہی

۷ کسی مثلث کے ایک ضلع میں کوئی نقطہ دیا ہوا ہی اس نقطہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ مثلث کے دو برابر حصے کرے

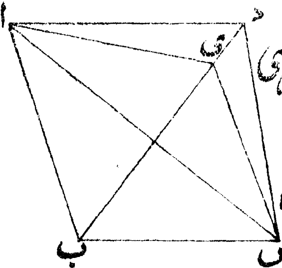
۸ کسی دی ہوئی ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ ذو اربعۃ الاضلاع کو آدھا آدھا کر دے

۹ اگر ایسا مثلث بنایا جاوے کہ اسکے دو ضلعے کسی ذو اربعۃ الاضلاع کے قطروں کے الگ الگ برابر ہوں اور ان ضلعوں کے درمیان کا زاویہ قطروں کے درمیان کے کسی زاویہ کے برابر ہو تو اس مثلث کا رقبہ اس ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کی برابر ہوگا

شکل ۳۹ اتفاقی

جو برابر مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی طرف میں ہوں وہ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوتے ہیں

فرض کرو کہ برابر مثلث ا ب س اور د ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور اسکے ایک ہی طرف میں ہیں



تو مثلث ا ب س اور د ب س ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں گے

ا د ملاؤ ۔ تو ا د متوازی ب س کا ہوگا

اگر ا د متوازی ب س کا نہو

ممکن ہو تو نقطہ ا سے ا ی متوازی ب س کا اور ب د یا ب د کے بڑھے ہوئے حصہ کو ی پر کاٹتا ہوا کھینچو شکل ۳۱

اور ی س ملاؤ

چونکہ مثلث اب س اور ی ب س ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہیں

اسلئے مثلث اب س برابر ہے مثلث ی ب س کے — شکل ۳۷

لیکن مثلث اب س مثلث دب س کے برابر ہے — فرض

اسلئے مثلث دب س برابر ہے مثلث ی ب س کے — علوم متعارفہ

یعنی بڑا مثلث برابر ہے چھوٹے مثلث کے اور یہہ ناممکن ہے

اسلئے ای متوازی ب س کا نہیں ہے

اور اسی طرحسے ثابت ہو سکتا ہے کہ کوئی خط مستقیم سوا اد کے متوازی ب س کا نہیں کھچ سکتا

اسلئے اد متوازی ب س کا ہے

اسلئے جو برابر مثلث ایک ہی قاعدہ پر الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل سینتیسویں شکل کا عکس ہے

مشق

۱ دو خط مستقیم اب اور س د ایک دوسرے کو نقطہ ی پر کاٹتے ہیں اور مثلث ای س برابر ہے مثلث ب ی د کے ثابت کرو اد متوازی ب س کا ہے

۲ خط مستقیم جو کسی مثلث کے دو ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں کو ملاتا ہے اس مثلث کے قاعدہ کا متوازی اور آدھا ہوتا ہے

۳ مثلث اب س کے قاعدہ ب س میں ایک نقطہ د لو اور اد اور د س اور اب اور ب س کو نقطوں ی اور ف اور ج اور ہ پر آدھا آدھا کرو ثابت کرو کہ ی ج اور ف ہ آپسمیں برابر اور متوازی ہیں

۴ خط مستقیم جو کسی ذوار بعۃ الاضلاع کے متصل ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں کو

ملائینگے ایسی شکل متوازی الاضلاع پیدا کریں گے کہ وہ ذوار بعۃ الاضلاع کی آدھی ہوگی

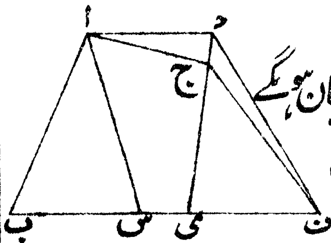
۵ کسی مثلث کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطے دیے ہوئے ہیں اُس مثلث کو بناؤ

۶ اگر کسی مثلث کے ہر ایک دو ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطے ملائے جائیں تو مثلث جو اسطرح پر بنے گا کل مثلث کا چوتھائی ہوگا

شکل ۴۰ اثباتی

جو برابر مثلث برابر قاعدوں پر جو ایک ہی سیدھہ میں ہیں اور اُن قاعدوں کے ایک ہی طرف میں واقع ہوتے ہیں وہ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوتے ہیں

فرض کرو کہ برابر مثلث ا ب س اور د ی ف برابر قاعدوں ب س اور ی ف پر جو ایک ہی سیدھہ ب ف میں ہیں اور اُن قاعدوں کے ایک ہی طرف میں واقع ہیں



تو یہہ مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہونگے

ا د ملاؤ ۔ تو ا د متوازی ب ف کا ہوگا

اگر ا د متوازی ب ف کا نہو

ممکن ہو تو ا ج متوازی ب ف کا اور ی د یا ی د کے بڑھے ہوئے حصّہ کو نقطہ ج پر کاٹتا ہوا کھینچو — شکل ۳۱

اور ج ف ملاؤ

چونکہ مثلث ا ب س اور ج ی ف برابر قاعدوں ب س اور ی ف پر اور ایک ہی متوازی خطوں ا ج اور ب ف کے درمیان ہیں

اسلیے مثلث ا ب س برابر ہوگا مثلث ج ی ف کے — شکل ۳۸

لیکن مثلث ا ب س برابر ہے مثلث د ی ف کے — فرض

اسلئے مثلث د ی ف برابر ہی مثلث ج ی ف کے — علوم متعارفہ ۱

یعنی بڑا مثلث برابر ہی چھوٹے مثلث کے

اسلئے ا ج متوازی ب ف کا نہیں ہی

اور اسی طرحسے ثابت ہو سکتا ہی کہ کوئی خط مستقیم سوا اسے ا د کے

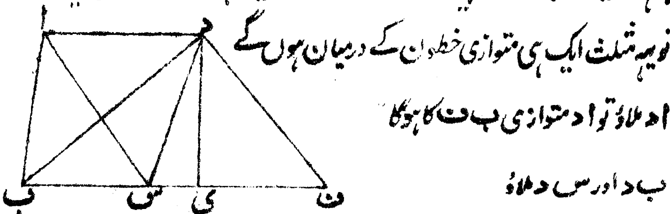
ب ف کا متوازی نہیں ہی

اسلئے ا د متوازی ب ف کا ہی

اسلئے جو برابر مثلث برابر قاعدوں پر الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل اڑتیسویں شکل کا عکس ہی اور دلیل خلف سے ثابت کی گئی ہی اسکو بغیر دلیل خلف کے اسطرح ثابت کرتے ہیں

فرض کرو کہ برابر مثلث ا ب س اور د ی ف برابر قاعدوں ب س اور ی ف پر جو ایک ہی سیدھ ب ف میں ہیں اور اُن قاعدوں کے ایک ہی طرف میں واقع ہیں



تو یہہ مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہونگے

ا د ملاؤ تو ا د متوازی ب ف کا ہوگا

ب د اور س د ملاؤ

چونکہ مثلث د ب س اور د ی ف برابر قاعدوں پر واقع ہیں اور انکی اونچائی ایک ہی ہی -

اسلئے مثلث د ب س برابر ہی مثلث د ی ف کے — شکل ۳۸

لیکن مثلث د ی ف برابر ہی مثلث ا ب س کے — فرض

اسلئے مثلث ا ب س برابر ہی مثلث د ب س کے — علوم متعارفہ ۱

اسلئے ا د متوازی ہی ب ف کا — شکل ۳۹

اسلئے جو برابر مثلث برابر قاعدوں پر الخ - یہی ثابت کرنا تھا

سینتیسویں اور اڑتیسویں شکل کا دوسرا عکس " اگر برابر مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے

درمیان ہوں یا برابر اونچائی رکھتے ہوں تو وہ یا تو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر قاعدوں پر ہونگے ثابت کرو

اگر راس اُن سب برابر مثلثوں کے جو ایک ہی قاعدہ پر یا ایک ہی سیدھہ کے برابر قاعدوں پر ایک ہی طرف میں واقع ہوں ملائے جائیں تو ایک خط مستقیم پیدا ہوگا جو اُن قاعدوں کا متوازی ہوگا اِس خط مستقیم کو اُن مثلثوں کی راسوں کا مقام النقاط کہتے ہیں

ہندسہ مسطح میں مقام النقاط وہ خط مستقیم یا خط منحنی ہی جسکا ہر ایک نقطہ ایک خاص شرط کو پورا کرے اور کوئی اور نقطہ اُس شرط کا پورا کرنیوالا نہو مثلاً سطح مستوی میں وہ مقام النقاط جسکا ہر نقطہ ایک دیے ہوئے نقطہ سے دی ہوئی دوری پر ہو اُس دائرہ کا محیط ہی جسکا مرکز دیا ہوا نقطہ ہی اور جسکا نصف قطر دی ہوئی دوری ہی اور اُن نقطوں کا جو کسی دو دیے ہوئے نقطوں سے برابر دوری پر ہیں مقام النقاط وہ خط مستقیم ہی جو اُن دو نقطوں کے ملانیوالے خط مستقیم کے دو برابر حصّے کرتا ہی اور اُسکے ساتھ زاویے قائمہ بناتا ہی

مقام النقاط کے سوال

دریافت کرو مقام النقاط

۱ اُن نقطوں کا جو دیے ہوئے خط سے دی ہوئی دوری پر ہیں

۲ اُن نقطوں کا جو کسی دیے ہوئے زاویہ کی ساقوں سے برابر دوری پر ہیں

۳ اُن نقطوں کا جو کسی دیے ہوئے دائرہ سے برابر دوری پر ہیں

۴ اُن نقطوں کا جو دو دیے ہوئے خط مستقیم سے جو ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں برابر دوری پر ہیں

۵ اُن خط مستقیم کے بیچوں بیچ کے نقطوں کا جو ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دیے ہوئے

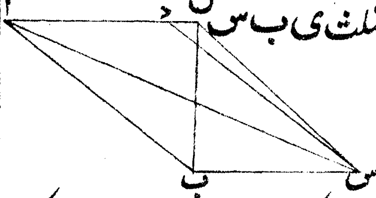
خط مستقیم تک کھینچے گئے ہیں

شکل ۴۱ اثباتی

اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں تو متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہوگی

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع اب س د اور مثلث ی ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ا ی کے درمیان ہیں

تو متوازی الاضلاع اب س د مثلث ی ب س سے دونی ہوگی



ا س ملاؤ

چونکہ مثلث اب س اور ی ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ا ی کے درمیان ہیں

اسلئے مثلث اب س برابر ہے مثلث ی ب س کے — شکل ۳۷

لیکن متوازی الاضلاع اب س د مثلث اب س سے دونی ہے کیونکہ قطر ا س اسکے دو برابر حصے کرتا ہے — شکل ۳۴

اسلئے متوازی الاضلاع اب س د مثلث ی ب س سے دونی ہے

اسلئے اگر متوازی الاضلاع اور مثلث الخ - یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح اگر متوازی الاضلاع اور مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیاں ہوں تو ثابت ہو سکتا ہے کہ متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہوگی

اس شکل کے عکس "اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر یا ایک ہی سیدھ کے برابر قاعدوں پر واقع ہوں اور متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہو تو متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیاں ہونگے" اور اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک

ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں اور متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہو تو متوازی الاضلاع اور مثلث یا تو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر قاعدوں پر ہونگے" ثابت کرو

یہہ شکل مثلثوں کی مساحت کی اور اسلیئے سب مستقیم الاضلاعوں کی مساحت کی (کیونکہ ہر مستقیم الاضلاع کے مثلث آسانی سے بن سکتے ہیں) بنیاد ہی چونکہ متوازی الاضلاع کے رقبہ کو دریافت کرنیکے لیئے مثلث کے قاعدہ کو اسکی چوڑائی یعنی اونچائی کے ساتھہ گنا کرتے ہیں اسلیئے مثلث کا رقبہ دریافت کرنیکے لیئے مثلث کے قاعدہ کو اسکی اونچائی سے گنا کرو اور جو کچھہ گنا کرنے سے حاصل ہو اسکا آدھا لیلو وہی مثلث کا رقبہ ہوگا

مشق

۱ اگر مثلث اور متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں اور مثلث کا قاعدہ متوازی الاضلاع کے قاعدہ سے دونا ہو تو مثلث برابر ہوگا متوازی الاضلاع کے

۲ اب س د متوازی الاضلاع ہی اور کسی نقطہ ع سے جو متوازی الاضلاع کے اندر ہی متوازی الاضلاع کے زاویوں تک خط مستقیم کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ مثلث اع ب اور س ع د ملکر متوازی الاضلاع کے آدھے ہیں

۳ متوازی الاضلاع اب س د کے زاویہ د سے ایک خط جو ب س سے نقطہ ف پر اور اب سے نقطہ ج پر ملتا ہی کھینچا گیا ہی ثابت کرو کہ مثلث اب ف اور س ف ج آپسمیں برابر ہیں

۴ اب س د ایک ذوار بعۃ الاضلاع ہی جسکا ضلع اب متوازی س د کا ہی اور ضلع اد کے بیچوں بیچ کے نقطہ ی سے ب اور س تک خط مستقیم کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ی ب س ذوار بعۃ الاضلاع کا آدھا ہی

۵ دی ہوئی متوازی الاضلاع کی برابر ایک معین بناؤ

شکل ۴۴ عملی

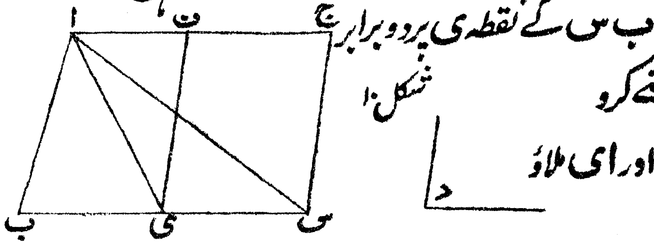
دیئے ہوئے مثلث کی برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بناؤ کہ اسکا

ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ مستقیم الخطین کے برابر ہو

فرض کرو کہ اب س دیا ہوا مثلث اور د دیا ہوا زاویہ مستقیم الخطین ہی

اب س کی برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بنانی ہی کہ اُسکا ایک زاویہ د کے برابر

ب س کے نقطہ ی پر دو برابر حصے کرو



اور ای ملاؤ

ی س کے نقطہ ی پر زاویہ س ی ف برابر زاویہ د کے بناؤ شکل ۲۳

س سے س ج متوازی ی ف کا کھینچو اور ا سے ا ف ج متوازی

ی س کا اور ی ف کو نقطہ ف پر اور س ج کو نقطہ ج پر کاٹتا ہوا کھینچو شکل ۳۱

تو س ی ف ج متوازی الاضلاع ہی حد ۱

چونکہ مثلث اب ی اور ای س برابر قاعدوں ب ی اور ی س پر

اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ا ج کے درمیان ہیں

اسلئے مثلث اب ی اور ای س آپسمیں برابر ہیں شکل ۳۸

اسلئے مثلث اب س مثلث ای س کا دونا ہی

لیکن متوازی الاضلاع س ی ف ج بھی مثلث ا ی س کی دونی

ہی کیونکہ متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ ی س پر اور ایک ہی

متوازی خطوں ی س اور ا ج کے درمیاں ہیں

اسلئے متوازی الاضلاع س ی ف ج مثلث اب س کے برابر ہی

اور اُسکا ایک زاویہ س ی ف دیے ہوئے زاویہ د کے برابر ہی

اسلئے دیے ہوئے مثلث اب س کی برابر ایسی متوازی الاضلاع

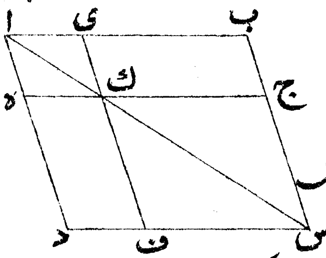
س ی ف ج بن گئی کہ اُسکا ایک زاویہ س ی ف برابر دیے ہوئے زاویہ د کے ہی اسی متوازی الاضلاع کے بنانے کی ضرورت تھی

جسطرح دیے ہوئے مثلث کی برابر ایک متوازی الاضلاع بنائی گئی ہی جسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہی اسیطرح ہم دیے ہوئے متوازی الاضلاع کی برابر ایسا مثلث بنا سکتے ہیں کہ اُسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ کی برابر ہو

شکل ۴۳ اثباتی

متمم ان متوازی الاضلاعوں کے جو کسی متوازی الاضلاع کے قطر کے گرد واقع ہیں آپسمیں برابر ہوتے ہیں

فرض کرو کہ ا ب س د متوازی الاضلاع ہی جسکا قطر ا س ہی اور ی ہ اور ج ف وہ متوازی الاضلاع ہیں جو اسکے گرد ہیں یعنی جنمیں ا س ہوکر گذرتا ہی اور ب ك اور ك د اور متوازی الاضلاع ہیں جو شکل ا ب س د کو پورا کرتی ہیں اور اسلئے جنکا نام متمم ہی



تو متمم ب ك برابر ہوگا متمم ك د کے

چونکہ ا ب س د متوازی الاضلاع ہی

اور ا س اُسکا قطر ہی

اسلئے مثلث ا ب س برابر مثلث ا د س کے ہی — شکل ۳۴

پھر چونکہ ا ی ك ہ متوازی الاضلاع ہی اور ا ك اُسکا قطر ہی

اسلئے مثلث ا ی ك برابر ہی مثلث ا ہ ك کے — شکل ۳۴

اور اِسی طرح یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ مثلث ك ج س برابر ہی مثلث ك ف س کے

اسلئے دو مثلث ا ی ك اور ك ج س برابر ہیں دو مثلث ا ہ ك

اور ك ف س كے   علوم متعارفہ ۲

لیکن کُل مثلث ا ب س برابر ہی کُل مثلث ا د س کے

اسلئے باقی متمم ف ك برابر ہی باقی متمم ك د کے

اسلئے متمم اُن متوازی الاضلاعوں کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا

مشق

۱ اوپر کی شکل میں ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ب ف برابر ہی متوازی الاضلاع ہ س کے

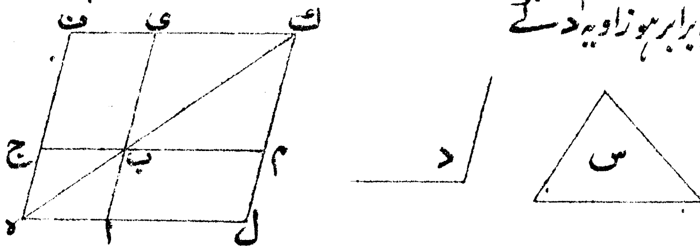
۲ اوپر کی شکل میں اگر قطری ہ ا اور ب د اور ج ف کھینچے جائیں تو یہ تینوں خطر آپسمیں متوازی ہوں گے

۳ متوازی الاضلاع ا ب س د میں نقطہ ع سے دو خط مستقیم متوازی الاضلاع کے ضلعوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور متوازی الاضلاع ع ب اور ع د آپسمیں برابر ہیں ثابت کرو کہ نقطہ ع قطر ا س میں ہی

شکل ۴۴ عملی

دیے ہوئے خط مستقیم پر ایک دیے ہوئے مثلث کے برابر ایسی متوازی الاضلاع بناؤ کہ اسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ مستقیم الخطین کے برابر ہو

فرض کرو کہ ا ب دیا ہوا خط مستقیم اور س دیا ہوا مثلث اور د دیا ہوا زاویہ مستقیم الخطین ہی خط مستقیم ا ب پر مثلث س کی برابر ایسی متوازی الاضلاع بنانی ہی کہ اسکا ایک زاویہ برابر ہو زاویہ د کے



مثلث س کے برابر ایسی متوازی الاضلاع ب ی ف ج بناؤ کہ اسکا زاویہ ی ب ج زاویہ د کے برابر ہو   شکل ۴۲

اور اس متوازی الاضلاع کو اسطرح رکھو کہ ب ی اور اب ایک ہی خط مستقیم میں ہوں

اسے اہ متوازی ب ج یا ی ت کا کھینچو — شکل ۳۱

ف ج کو ہ تک بڑھاؤ اور ب ہ ملاؤ

چونکہ خط مستقیم ہ ف دو متوازی خطوں اہ اور ی ف پر گرتا ہے

اسلئے زاویے اہ ف اور ہ ف ی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۲۹

اسواسطے زاویے ب ہ ف اور ہ ف ی ملکر دو قائموں سے کم ہیں

لیکن جو دو خط مستقیم ایک اور خط مستقیم کے ساتھ اسکے ایک طرف

میں ایسے دو زاویے بناتے ہیں کہ وہ ملکر دو قائموں سے کم ہیں تو وہ دونوں

خط مستقیم بڑھائے جانے سے ملجاتے ہیں — علوم متعارفہ ۱۲

اسلئے ہ ب اور ف ی بڑھائے جانے سے ملجائیں گے

فرض کرو کہ وہ بڑھائے جانے سے نقطہ ک پر ملتے ہیں

ک سے ک ل متوازی ی ا یا ت ہ کا کھینچو — شکل ۳۱

اور ہ ا اور ج ب کو اتنا بڑھاؤ کہ وہ ک ل سے ل اور م نقطوں پر ملیں

تو ہ ل ک ت متوازی الاضلاع ہے جسکا قطر ہ ک ہے اور متوازی الاضلاع

اج اور م ی قطر ہ ک کے گرد ہیں اور ل ب اور ب ت انکے متمم ہیں

اسلئے متمم ل ب برابر ہے متمم ب ت کے — شکل ۴۳

لیکن ب ت مثلث س کے برابر بنایا گیا ہے

اسلئے ل ب مثلث س کے برابر ہے — علوم متعارفہ ۱

اور چونکہ زاویہ ج ب ی زاویہ اب م کے برابر ہے — شکل ۱۵

اور زاویہ ج ب ی برابر زاویہ د کے بنایا گیا ہے

اسلئے زاویہ اب م برابر ہے زاویہ د کے — علوم متعارفہ ۱

اسلئے دیے ہوئے خط مستقیم اب پر دیے ہوئے مثلث س کے برابر ایسی متوازی الاضلاع ل ب بنگئی کہ اُسکا زاویہ ا ب م دیے ہوئے زاویہ د کے برابر ہی۔ اسی متوازی الاضلاع کے بنانے کی ضرورت تھی

اس شکل میں اقلیدس نے یہہ نہیں ثابت کیا ہی کہ ا ہ اور ف ج ملیں گے یہہ بات آسانی ثابت ہو سکتی ہی ڈیمس صاحب اس شکل کا اسطرح بنانا تجویز کرتے ہیں کہ ج ہ برابر اب کے بناؤ اور ا ہ ملاؤ تو تینتیسوں شکل سے ا ہ متوازی ب ج کا ہوگا

نتیجہ صریح اس شکل سے صاف ظاہر ہی کہ کسطرح دیے ہوئے خط مستقیم پر دیے ہوئے مثلث کے برابر ایک قائم الزوایا بنایا جاتا ہی

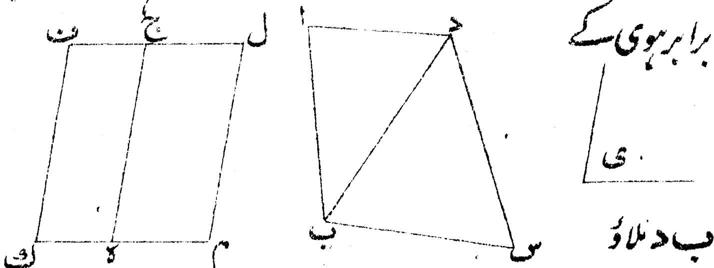
مشق

ا دیے ہوئے خط مستقیم پر دی ہوئی متوازی الاضلاع کے برابر ایسا مثلث بناؤ کہ اُسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

شکل ۴۵ عملی

دی ہوئی مستقیم الاضلاع کے برابر ایسی متوازی الاضلاع بناؤ کہ اُسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ مستقیم الخطین کے برابر ہو

فرض کرو کہ اب س د دی ہوئی مستقیم الاضلاع اور ی یا ہوا زاویہ مستقیم الخطین ہی اب س د کے برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بنانی ہی کہ اُسکا ایک زاویہ ی کے برابر ہو



ب د ملاؤ

مثلث ا د ب کے برابر متوازی الاضلاع ف ہ بناؤ جسکا زاویہ ف ک ہ

برابر زاویہ ی کے ہو — شکل ۴۴

اور خط مستقیم ج ہ پر مثلث ب د س کے برابر متوازی الاضلاع

ج م بناؤ جسکا زاویہ ج ہ م برابر زاویہ ی کے ہو — شکل ۴۴

تو شکل ف ک م ل متوازی الاضلاع ہوگی اور وہ برابر ا ب س د

کے ہوگی اور اُسکا ایک زاویہ برابر زاویہ ی کے ہوگا

چونکہ زاویوں ف ک ہ اور ج ہ م میں سے ہر ایک زاویہ ی کے

برابر ہے

اِسلئے زاویہ ف ک ہ زاویہ ج ہ م کے برابر ہے — علوم متعارفہ ۱

ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ک ہ ج ملاؤ

اِسلئے زاویے ف ک ہ اور ک ہ ج برابر ہیں زاویوں ک ہ ج

اور ج ہ م کے — علوم متعارفہ ۲

لیکن زاویے ف ک ہ اور ک ہ ج ملکر برابر ہیں دو قائموں کے — شکل ۲۹

اِسلئے زاویے ک ہ ج اور ج ہ م بھی ملکر برابر ہیں دو قائموں کے

چونکہ خط مستقیم ج ہ کے نقطہ ہ پر دو خط مستقیم ک ہ اور م ہ اُسکے

آمنے سامنے کی طرفوں سے آکر ایسے دو زاویے متصلہ پیدا کرتے ہیں کہ

وہ ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

اِسلئے ک ہ اور ہ م ایک ہی خط مستقیم میں ہیں — شکل ۱۴

اور چونکہ خط مستقیم ہ ج دو متوازی خطوں ک م اور ف ج پر گرتا ہے

اِسلئے زاویہ م ہ ج برابر ہے زاویہ متبادلہ ہ ج ف کے — شکل ۲۹

ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ہ ج ل ملاؤ

اِسلئے زاویے م ہ ج اور ہ ج ل برابر ہیں زاویوں ہ ج ل اور

ہ ج ف کے　　علوم متعارفہ ۲

لیکن زاویے م ہ ج اور ہ ج ل ملکر برابر دو قائموں کے ہیں　شکل ۲۹

اسلیئے زاویے ہ ج ل اور ہ ج ف بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں　علوم متعارفہ

اسلیئے ف ج اور ج ل ایک ہی خط مستقیم میں ہیں　شکل ۱۴

اور چونکہ ك ف متوازی ہی ہ ج کا اور ہ ج متوازی ہی م ل کا

اسلیئے ك ف متوازی ہی م ل کا　شکل ۳۰

اور ف ل متوازی ك م کا ثابت ہو چکا ہی

اسلیئے ف ك م ل متوازی الاضلاع ہی　حد ا

اور چونکہ متوازی الاضلاع ہ ف برابر مثلث ا ب د کے اور متوازی الاضلاع

ج م برابر مثلث ب د س کے بنائی گئی ہی

اسلیئے کل متوازی الاضلاع ك ف ل م برابر ہی کل مستقیم الاضلاع

ا ب س د کے　علوم متعارفہ ۲

اسلیئے دی ہوئی مستقیم الاضلاع ا ب س د کے برابر متوازی الاضلاع

ك ل بنگئی جسکا زاویہ ف ك م برابر دیے ہوئے زاویہ ی کے ہی - اسی

متوازی الاضلاع بنانیکی ضرورت تھی

نتیجہ صریح - اس شکل سے صاف ظاہر ہی کہ دیے ہوئے خط مستقیم پر دی

ہوئی مستقیم الاضلاع کے برابر ایک متوازی الاضلاع جسکا ایک زاویہ دیے

ہوئے زاویہ کے برابر ہو اسطرح بن سکتی ہی کہ پہلے دیے ہوئے خط مستقیم پر

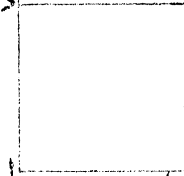
چوالیسویں شکل کی مدد سے مثلث ا ب د کے برابر متوازی الاضلاع بناؤ جسکا

ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

جب مستقیم الاضلاع میں چار سے زیادہ ضلع ہوں تو بھی اس مستقیم الاضلاع کے برابر متوازی الاضلاع

بن سکتی ہی

شکل ۴۶ عملی



دیے ہوئے خط مستقیم پر ایک مربع بناؤ

فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم ہی

اب پر ایک مربع بنانا ہی

اسے خط مستقیم اس خط مستقیم اب کے ساتھ

زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو — شکل ۱۱

اد برابر اب کے بناؤ — شکل ۳

نقطہ د سے دی متوازی اب کا اور نقطہ ب سے ب ی متوازی

اد کا دی سے نقطہ ی پر ملتا ہوا کھینچو — شکل ۳۱

تو اب ی د متوازی الاضلاع ہوئی

اور اسلیئے اسکا ضلع اب برابر ہی دی کے اور ضلع اد برابر ب ی کے — شکل ۳۴

لیکن اد برابر اب کے بنایا گیا ہی

اسلیئے چاروں ضلعے اب اور ب ی اور ی د اور د ا آپسمیں برابر ہیں

اور متوازی الاضلاع اب ی د متساوی الاضلاع ہی

اسکے سب زاویے بھی قائمے ہیں

چونکہ اد دو متوازی خطوں اب اور دی پر گرتا ہی

اسلیئے زاویے ب اد اور ا دی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں — شکل ۲۹

لیکن زاویہ ب اد ایک قائمہ بنایا گیا ہی

اسلیئے زاویہ ا دی بھی قائمہ ہی

لیکن متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے زاویے آپسمیں برابر ہوتے ہیں — شکل ۳۴

اسلئے سامنے کے زاویوں اب ی اور ب ی د میں سے ہر ایک قائمہ ہی

اسلئے متوازی الاضلاع اب ی د قائم الزوایا ہی

اور یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ وہ متساوی الاضلاع بھی ہی

اسلئے اب ی د مربع ہی اور وہ دیے ہوئے خط مستقیم اب پر بنا ہی

اسی کے بنانے کی ضرورت تھی

نتیجہ صریح   اس شکل کے ثبوت سے صاف ظاہر ہی کہ جس متوازی الاضلاع

کا ایک زاویہ قائمہ ہی اُسکے سب زاویے قائمے ہیں

مشق

۱   اگر مثلث اب س کے ضلعوں اس اور ب س پر مربع اس دی اور ب س ف

بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ خط مستقیم اف اور ب د آپسمیں برابر ہونگے

۲   اگر مربع کے ہر ایک ضلع میں ایک ایک نقطہ زاویہ سے برابر دوری پر ترتیب وار لیا جا

اور ان نقطوں کے درمیان ترتیب وار خط مستقیم کھینچے جائیں تو شکل جو ان خطوں سے بنیگی مربع

ہوگی اور اس نئے مربع کا رقبہ اصل مربع کے رقبہ سے چھوٹا ہوتا جائیگا جسقدر نقطوں کی دوری

زاویوں سے بڑھتی جائیگی یہانتک کہ یہہ دوری اصل مربع کے ضلع کی لمبائی کی آدھی ہو اور

اُس صورت میں نئے مربع کا رقبہ سب سے چھوٹا ہوگا

شکل ۴۷ اثباتی

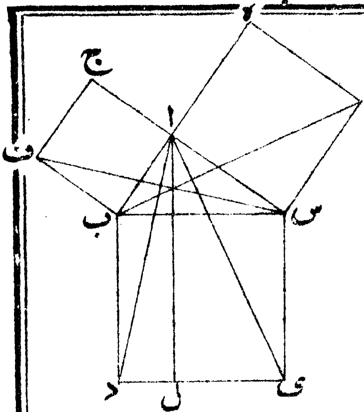
ہر مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے سامنے کے ضلع پر جو مربع بنایا جاتا ہی

وہ برابر ہوتا ہی اُن مربعوں کے جو زاویہ قائمہ بنانے والے ضلعوں پر بنائے جاتے ہیں

فرض کرو کہ اب س مثلث قائم الزاویہ ہی جسکا زاویہ ب اس قائمہ ہی

تو مربع جو ضلع ب س پر بنایا جائیگا وہ برابر ہوگا اُن مربعوں کے جو ضلعوں

ب ا اور اس پر بنائے جائیں گے



ب س پر مربع ب د ی س

اور ب ا اور اس پر مربع ج ب اور ک

ہ س بناؤ

اسے ال متوازی ب د یا ی س

کا کھینچو

اور اد اور ف س ملاؤ

چونکہ زاویہ ب اس قائمہ ہی (فرض) اور زاویہ ب اج قائمہ ہی — حد ۳۰

دو خط مستقیم اس اور اج خط مستقیم اب کی آمنے سامنے کی طرفوں سے اگر نقطہ ا پر ملتے ہیں اور اس خط کے ساتھ اس نقطہ پر زاویے منصلہ برابر دو قایموں کے بناتے ہیں

اسلئے س ا اور اج ایک ہی خط مستقیم میں ہیں — شکل ۱۴

اسیطرح یہ ثابت ہو سکتا ہی کہ ب ا اور اہ ایک ہی خط مستقیم میں ہیں

چونکہ زاویہ د ب س برابر ہی زاویہ ف ب ا کے کیونکہ ہر ایک انمیں سے قائمہ ہی — علوم متعارفہ ۱۱

ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ا ب س ملاؤ

اسلئے کُل زاویہ د ب ا برابر ہی کُل زاویہ ف ب س کے — علوم متعارفہ ۲

چونکہ مثلث اب د اور ف ب س میں دو ضلعے اب اور ب د الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں ف ب اور ب س کے — حد ۳۰

اور زاویہ اب د برابر زاویہ ف ب س کے ہی

اسلئے مثلث اب د برابر مثلث ف ب س کے ہی — شکل ۴

اب متوازی الاضلاع ب ل مثلث اب د سے دونی ہی کیونکہ متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ ب د پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب د اور ال کے

درمیان واقع ہیں — شکل ۴۱

اور مربع ج ب مثلث ف ب س سے دونا ہی کیونکہ مربع اور مثلث ایک ہی قاعدہ ف ب پر اور ایک ہی متوازی خطوں ف ب اور ج ا کے درمیان واقع ہیں — شکل ۴۱

لیکن جو چیزیں برابر چیزوں کی دونی ہوتی ہیں وہ آپسمیں برابر ہوتی ہیں — علوم متعارفہ ۶

اسلئے متوازی الاضلاع ب ل مربع ج ب کے برابر ہی

اسیطرح ا ی اور ب ك ملانے سے یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ متوازی الاضلاع س ل مربع ہ س کے برابر ہی

اسلئے کل مربع ب د ی س برابر ہی دو مربعوں ج ب اور ہ س کے — علوم متعارفہ ۲

اور مربع ب د ی س ضلع ب س پر بنایا گیا ہی اور مربع ج ب اور ہ س ضلعوں ا ب اور ا س پر بنائے گئے ہیں

اسلئے ہر مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے سامنے کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کی تعلیم کیلئے صرف ایک صورت بنائی ہی لیکن اُسکی یہہ آٹھہ صورتیں بن سکتی ہیں

۱ تینوں مربع ب ی اور ب ج اور س ہ مثلث ا ب س کے باہر کیطرف بنائے جائیں

۲ تینوں مربع ب ی اور ب ج اور س ہ مثلث ا ب س کے بھیتر کی طرف بنائے جائیں

۳ مربع ب ی بھیتر کی طرف بنایا جائے اور مربع ب ج اور س ہ باہر کی طرف بنائے جائیں

۴ مربع ب ی باہر کی طرف بنایا جائے اور مربع ب ج اور س ہ بھیتر کی طرف بنائے جائیں

۵ مربع ب ج بھیتر کی طرف بنایا جائے اور مربع ب ی اور س ہ باہر کی طرف بنائے جائیں

۶ مربع ب ج باہر کی طرف بنایا جائے اور مربع ب ی اور س ہ بھیتر کیطرف بنائے جائیں

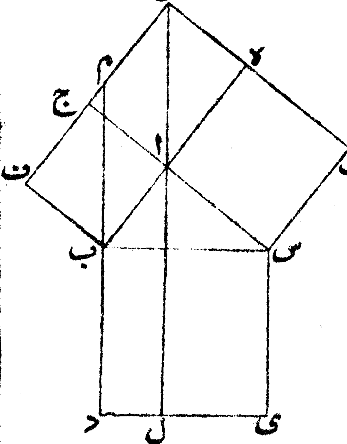
۷ مربع س ہ بھیتر کی طرف بنایا جائے اور مربع ب ی اور ب ج باہر کی طرف بنائے جائیں

۸ مربع س ہ باہر کیطرف بنایا جائے اور مربع ب ی اور ب ج بھیتر کی طرف بنائے جائیں

ان سب صورتوں میں اقلیدس کا ثبوت لگ سکتا ہی صرف اتنا یاد رکھنا چاہئے کہ انمیں سے بعض صورتوں میں مثلثوں اب د اور ب ف س یا مثلثوں اس ی اور ک س ب کی برابری بجاے اس مقالہ کی چوتھی شکل کے اُس نتیجہ کی مدد سے جو ہم نے اڑتیسویں شکل کی شرح میں لکھا ہی ثابت ہوتی ہی

یہہ شکل چھتیسویں شکل کی دوسری شق کی ایک خاص صورت ہی اور اسطرح بھی ثابت ہوتی ہی

فرض کرو کہ اب س مثلث قائم الزاویہ ہی جسکا زاویہ ب ا س قائمہ ہی تو مربع جو ب س پر بنایا جائیگا برابر ہوگا اُن مربعوں کے جو ب ا اور ا س پر بنائے جائیں گے



ب س پر مربع ب د ی س اور ب ا اور ا س پر مربع ب ف ج ا اور س ک ہ ا بناؤ

چونکہ زاویے ب ا س اور س ا ہ دو قائمے ہیں اسلئے ب ا اور ا ہ ایک خط مستقیم میں ہیں

شکل ۱۴

اور اسی دلیل سے س ا اور ا ج ایک خط مستقیم میں ہیں

ف ج اور ک ہ کو بڑھاؤ کہ وہ نقطہ ن پر ایک دوسرے سے ملیں

ن ا ملاؤ اور اُسکو بڑھاؤ کہ وہ د ی سے نقطہ ل پر ملے

د ب کو بڑھاؤ کہ وہ ف ن سے نقطہ م پر ملے

چونکہ زاویہ م ب س برابر ہی زاویہ ف ب ا کے کیونکہ ہر ایک اُن میں سے قائمہ ہی

علوم متعارفہ ۱۱

اور م ب ا ان دونوں برابروں میں مشترک ہی

اسلئے زاویہ ف ب م برابر ہی زاویہ ا ب س کے

علوم متعارفہ ۳

اور زاویے م ف ب اور ب اس بھی آپسمیں برابر ہیں کیونکہ انمیں سے ہر ایک قائمہ ہی — علوم متعارفہ ۱۱

اسلئے مثلث ب ف م اور ب اس میں دو زاویے ف ب م اور ب ف م الگ الگ برابر ہیں دو زاویوں ا ب س اور ب اس کے اور ضلع ف ب برابر ہی ضلع ا ب کے

اسلئے ضلع ف م برابر ہی ضلع اس کے اور ضلع ب م برابر ضلع ب س کے — شکل ۲۶

چونکہ ف ن متوازی ہی ب ہ کا اور ج س متوازی ن ک کا

اسلئے ج ہ متوازی الاضلاع ہی — حد ۱

اور ج ن برابر ہی ا ہ کے — شکل ۳۴

لیکن ا ہ برابر ہی اس کے — حد ۳۰

اسلئے ج ن برابر ہی اس کے — علوم متعارفہ ۱

لیکن ف م برابر اس کے ثابت ہو چکا ہی

اسلئے ج ن برابر ہی ف م کے — علوم متعارفہ ۱

ان دونوں برابروں میں سے م ج نکال ڈالو

اسلئے باقی م ن برابر ہی باقی ف ج کے — علوم متعارفہ ۳

لیکن ف ج برابر ہی ا ب کے — حد ۳۰

اسلئے م ن برابر ہی ا ب کے — علوم متعارفہ ۱

اور م ن متوازی بھی ہی ا ب کا

اسلئے ب م اور ا ن آپسمیں برابر اور متوازی ہیں — شکل ۳۳

اور شکل م ب ا ن متوازی الاضلاع ہی

چونکہ متوازی الاضلاع م ب ا ن اور مربع ب ج ایک ہی قاعدہ ب ا پر اور

ایک ہی متوازی خطوں ف ن اور ب ا کے درمیان ہیں

اسلئے متوازی الاضلاع م ب ا ن برابر ہی مربع ب ج کے — شکل ۳۵

لیکن متوازی الاضلاع م ب ا ن برابر ہی متوازی الاضلاع ب ل کے کیونکہ یہہ متوازی الاضلاع برابر قاعدوں م ب اور ب د پر اور ایک ہی متوازی خطوں م د اور ن ل کے درمیان ہیں — شکل ۳۶

اسلئے متوازی الاضلاع ب ل برابر ہی مربع ب ج کے — علوم متعارفہ ۱

اسی طرح یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ متوازی الاضلاع س ل برابر ہی مربع س ہ کے

اسلئے کل مربع ب ی برابر ہی مربعوں ب ج اور س ہ کے — علوم متعارفہ ۲

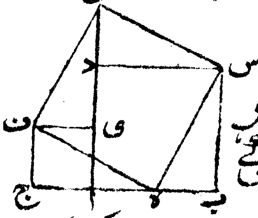
لیکن مربع ب ی مثلث ب ا س کے ضلع ب س پر بنایا گیا ہی اور مربع ب ج اور س ہ مثلث ب ا س کے ضلعوں ب ا اور ا س پر بنائے گئے ہیں

اسلئے ہر مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے سامنے کے ضلع پر جو مربع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس مشہور شکل کا ایجاد کرنیوالا حکیم فیثاغورس مشہور ہی - مہندسوں نے اس شکل کو طرح طرح سے ثابت کیا ہی نیچے لکھا ہوا بھی ایک نہایت عمدہ ثبوت ہی

فرض کرو کہ ا ب س د اور ا ی ف ج دو مربع ہیں اور وہ اسطرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے قاعدے ایک ہی خط مستقیم میں ہیں ج ہ اور ی ك میں سے ہر ایک کو برابر ا ب کے بناؤ

ہ س اور س ك اور ك ف اور ف ہ ملاؤ

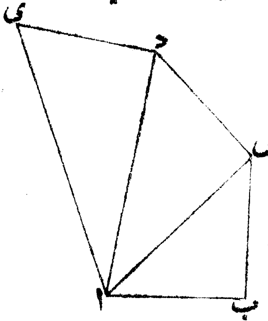


تو یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ مثلث ہ ب س سطح سے برابر ہی مثلث ف ی ك کے اور مثلث ف ج ہ برابر مثلث ك د س کے

اسلئے مربع ا ب س د اور ا ی ف ج ملکر رقبہ میں برابر ہیں شکل س ك ف ہ کے یہہ بھی اس مقالہ کی بتیسویں شکل سے ثابت ہو سکتا ہی کہ شکل س ك ف ہ مربع ہی اور ضلع س ہ اس مثلث قائم الزاویہ کا وتر ہی جسکے ضلعے س ب اور ب ہ دیئے ہوئے مربعوں کے ضلعوں کے برابر ہیں

اس ثبوت میں سینتیسویں شکل کے آگے کی شکلوں میں سے کسی شکل کا کام نہیں پڑتا ہے اور اس سے یہہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ ہم دو مربعوں کو کسطرح کتریں کہ اُنکے سب ٹکڑے ملکر تیسرا مربع بنجائیں

ہم اس شکل کی مدد سے √۲ اور √۳ اور √۴ وغیرہ گزکی لمبائی دریافت کرسکتے ہیں



اب برابر ایک گز کے لو اور ب س خط اب کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتا ہوا اور اُسکے برابر کھینچو اور اس ملاؤ اور س د برابر ایک گز کے اور اس کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو اور اد ملاؤ اور دی برابر ایک گز کے اور اد کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو اور ای ملاؤ

تو سینتالیسویں شکل سے ثابت ہوسکتا ہے کہ اب برابر ہے √۱ گز کے اور اس برابر √۲ گز کے اور اد برابر √۳ گز کے اور ای برابر √۴ گز کے

مشق

۱ سینتالیسویں شکل میں اگر ج ہ اور ف د اور ک ی ملائے جائیں تو ثابت کرو کہ مثلث ج اہ اور ف ب د اور ک س ی میں سے ہر ایک برابر ہے مثلث ب اس کے

۲ کسی دو یا زیادہ دیے ہوئے مربعوں کی برابر ایک مربع بناؤ

۳ ایک ایسا مربع بناؤ کہ وہ دو دیے ہوئے مربعوں کے فرق کی برابر ہو

۴ مثلث اب س کے زاویہ س سے اُسکے سامنے کے ضلع اب پر عمود س د گرایا گیا ہے ثابت کرو کہ اُن مربعوں کا فرق جو اس اور ب س پر بنائے جائیں گے برابر ہوگا اُن مربعوں کے فرق کے جو اد اور ب د پر بنائے جائیں گے اور وہ مربع جو اس اور ب د پر بنائے جائیں گے ملکر برابر ہوں گے اُن مربعوں کے جو ب س اور اد پر بنائے جائیں گے

۵ ہر مثلث میں زاویہ حادہ بنانے والے ضلعوں پر کے مربع ملکر اس زاویہ کے سامنے کے ضلع پر کے مربع سے بڑے ہوں گے

۶ ہر مثلث میں زاویہ منفرجہ بنانے والے ضلعوں پر کے مربع ملکر اس زاویہ کے سامنے کے ضلع پر کے مربع سے کم ہوں گے

۷ اگر مثلث کے دو ضلعوں پر کے مربع ملکر تیسرے ضلع پر کے مربع سے بڑے ہوں تو تیسرے ضلع کے سامنے کا زاویہ حادہ ہوگا اور اگر کم ہوں تو زاویہ منفرجہ ہوگا

۸ ب ا س ایک مثلث قایم الزاویہ ہی جسکا زاویہ ا قائمہ ہی کوئی خط مستقیم د ی ضلعوں اب اور اس کو د اور ی نقطوں پر کاٹتا ہی تو ثابت کرو کہ ب ی اور س د پر کے مربع ملکر ب س اور ی د پر کے مربعوں کے برابر ہوں گے

۹ اگر کسی نقطہ ع سے کسی مستطیل اب س د کے زاویوں تک خط مستقیم کھینچے جائیں تو ع ا اور ع س پر کے مربع ملکر ع ب اور ع د پر کے مربعوں کے برابر ہوں گے

۱۰ اگر مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کی ساقین ایسی ہوں کہ ایک ساق پر کا مربع دوسری ساق پر کے مربع کا تگنا ہو اور زاویہ قائمہ سے دو ایسے خط مستقیم کھینچے جائیں کہ انمیں سے ایک زاویہ قائمہ کے سامنے کے ضلع پر عمود ہو اور دوسرا اُس ضلع کے دو برابر حصے کرتا ہو تو ثابت کرو کہ یہہ خط زاویہ قائمہ کے تین برابر حصے کریں گے

۱۱ اب س مثلث قائم الزاویہ ہی جسکا زاویہ ا قائمہ ہی اور زاویوں ب اور س سے ضلعوں اس اور اب کے بیچوں بیچ کے نقطوں د اور ی تک خط مستقیم کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ب د اور س ی پر کے مربعوں کا چوگنا برابر ہوگا ب س پر کے مربع کے پچگنے کے

۱۲ کسی مثلث قائم الزاویہ کے وتر ب س اور ضلعوں اب اور اس پر مربع ب د ی س اور اف اور اج بنائے گئے ہیں ثابت کرو کہ ف د اور ی ج پر کے مربع ملکر ب س پر کے مربع کے پچگنے ہوں گے

شکل ۴۸ اثباتی

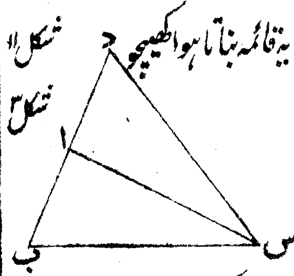
اگر مثلث کے ضلعوں میں سے ایک ضلع پر کا مربع باقی دو ضلعوں پر کے

مربعوں کے برابر ہو تو زاویہ جو ان دو ضلعوں سے بنا ہی قائمہ ہوگا

فرض کرو کہ مربع جو مثلث ا ب س کے ضلع ب س پر بنایا جائے برابر ہی ان مربعوں کے جو ضلعوں ا ب اور ا س پر بنائے جائیں

تو زاویہ ب ا س قائمہ ہوگا

نقطہ ا سے ا د ضلع ا س کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو شکل ۱۱



ا د برابر ا ب کے بناؤ شکل ۳

اور س د ملاؤ

چونکہ ا د برابر ہی ا ب کے

اسلئے ا د پر کا مربع برابر ہی ا ب پر کے مربع کے

ان برابروں میں سے ہر ایک میں ا س پر کا مربع ملاؤ

اسلئے ا د اور ا س پر کے مربع ملکر برابر ہیں ا ب اور ا س پر کے مربعوں کے علوم متعارفہ ۳

لیکن ا د اور ا س پر کے مربع ملکر برابر ہیں د س پر کے مربع کے کیونکہ زاویہ د ا س قائمہ ہی شکل ۴۷

اور ا ب اور ا س پر کے مربع ملکر برابر ہیں ب س پر کے مربع کے فرض

اسلئے د س پر مربع برابر ہی ب س پر کے مربع کے علوم متعارفہ ۱

اسلئے د س برابر ہی ب س کے

چونکہ ضلع ا د برابر ہی ضلع ا ب کے اور ا س دونوں مثلثوں د ا س اور ب ا س میں مشترک ہی

اسلئے دو ضلعے د ا اور ا س الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں ب ا اور ا س کے اور قاعدہ د س برابر ب س کے ثابت ہو چکا ہی

اسلئے زاویہ د ا س برابر ہی زاویہ ب ا س کے شکل ۸

لیکن زاویہ د ا س قائمہ بنایا گیا ہی

اسلئے زاویہ ب ا س قائمہ ہی

علوم مقصود

اسلئے اگر مثلث کے ضلعوں میں سے ایک ضلع پر جو مربع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل سینتالیسویں شکل کا عکس ہی پہلے مقالہ میں اسی عکس کو اقلیدس نے ثبوت مثبتہ سے

ثابت کیا ہی اس شکل کے ثابت کرنے میں اقلیدس نے چھیالیسویں شکل کے اس نتیجہ کو کہ برابر

خطوں کے مربع آپسمیں برابر ہوتے ہیں اور اُسکے عکس کو مان لیا ہی

پہلے مقالہ میں اقلیدس نے خطوں اور زاویوں اور سطحوں کے بنانے کے طریقے اور مثلث کے

ضلعوں اور زاویوں کے آپس کے علاقے بیان کئے ہیں اور مثلثوں اور متوازی الاضلاعوں کا

مقابلہ اس طرح کیا ہی جس سے اُنکا آپسمیں برابر یا نابرابر ہونا معلوم ہوتا ہی مہندسوں نے اس مقالہ

کے تین حصے کئے ہیں پہلے حصہ میں پہلی چھبیس شکلیں ہیں جنمیں خطوں اور زاویوں اور مثلثوں کا بنانا

دکھایا گیا ہی اور مثلث کی خاصیتیں بیان کی گئی ہیں دوسرے حصہ میں ستائیسویں شکل سے

چونتیسویں شکل تک ہیں اور انمیں متوازی خطوں کی خاصیتوں کا بیان ہی تیسرے حصہ میں

جسمیں پینتیسویں شکل سے اڑتالیسویں شکل تک ہیں خاص کر مثلثوں اور متوازی الاضلاعوں کے

رقبہ کی برابری یا نابرابری دکھانے کے لئے ایک دوسرے کا مقابلہ کیا گیا ہی - اقلیدس پر لوگ

یہہ اعتراض کرتے ہیں کہ اُسنے شکلوں کی ترتیب مضموں کے مطابق نہیں دی ہی اس اعتراض کے

دور کرنے کے لئے ہمنے اپنی کتاب کے آخر میں ایک فہرست لکھی ہی جس سے ہر مضمون کی کل

شکلیں ترتیب وار صاف صاف نظر پڑتی ہیں

تحلیل اور ترکیب

کسی دو یا زیادہ چیزوں کے ملانے اور اُنسے ایک نئی چیز پیدا کرنیکو ترکیب کہتے ہیں مثلاً

زرد اور نیلا رنگ ملاکر ہم سبز رنگ پیدا کرتے ہیں اگر سبز رنگ میں سے زرد اور نیلا رنگ جدا

جدا کر دیں تو اس جدا کرنے کو تحلیل کہتے ہیں عام معنی تحلیل اور ترکیب کے وہ ہیں جو اوپر بیان ہوئے

لیکن خاص معنی اُنکے علم ہندسہ میں یہہ ہیں ترکیب سے یہہ مراد ہی کہ ہم اُن اصول اور نتیجوں سے شروع کریں جو ابتک ثابت ہو چکے ہیں یعنے جنکا صحیح اور ممکن یا غلط اور ناممکن ہونا معلوم ہی اور آخر میں اُنسے ایک نیا نتیجہ نکالیں مثلاً اُن اثباتی یا عملی شکلوں کی مدد سے جنکو ہم ثابت کر چکے ہیں یا جنکا بنانا جانتے ہیں ایک نئی شکل اثباتی ثابت کریں یا شکل عملی بناویں اور تحلیل سے یہہ مراد ہی کہ کسی نئی شکل کے ثابت کرنے یا بنانے کے لئے ہم اسبات کو پہلے فرض کرلیں کہ وہ شکل ثابت ہو گئی یا بنگئی اور پھر سلسلہ وار دلیلوں کی مدد سے اُس فرض کی ہوئی شکل سے نئے نتیجے نکالیں اور دیکھیں کہ یہہ نتیجے اُن نتیجوں میں سے کسی کے مطابق ہیں یا نہیں جو ابتک ثابت ہو چکے ہیں اور اسطرح اپنی فرض کی ہوئی شکل کا صحیح اور ممکن یا غلط اور ناممکن ہونا دریافت کریں۔ اقلیدس نے کل شکلیں ترکیب کے ذریعہ سے ثابت کی ہیں یا بنائی ہیں لیکن تحلیل کا ذکر کہیں نہیں کیا ہی جسکی مدد سے پرانے زمانہ کے مہندسوں نے بہت سی اثباتی اور عملی شکلیں دریافت کی ہیں چونکہ تحلیل کا طریقہ ہندسہ کی شکلوں کا ثبوت یا عمل دریافت کرنے کے لئے بڑا مفید اور کار آمد ہی اسلئے ہم اُسکے قاعدے اور مثالیں نیچے لکھتے ہیں

تحلیل سے کسی اثباتی شکل کا ثبوت دریافت کرنے کا قاعدہ

۱ فرض کرلو کہ جو شکل تمہیں ثابت کرنی ہی اُسکا دعوی صحیح ہی

۲ پھر دیکھو کہ اُس دعوی کو صحیح فرض کر لینے سے کیا کیا نتیجے نکلتے ہیں

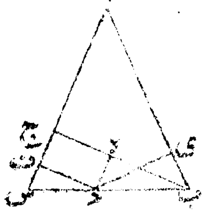
۳ اسکے بعد دریافت کرو کہ یہہ نتیجے اُن نتیجوں میں سے کسی کے مطابق ہیں یا نہیں جنکا تم صحیح یا غلط ہونا ابتک ثابت کر چکے ہو

۴ اگر انھیں سے کوئی نتیجہ اُس نتیجہ کے مطابق ہی جسکو تم غلط ثابت کر چکے ہو تو شکل کا دعوی بھی جسکو تم نے صحیح فرض کیا تھا غلط ہی

۵ اگر یہہ نتیجے تمہارے ثابت کئے ہوئے نتیجوں میں سے کسی کے مطابق نہیں ہیں تو ان نتیجوں سے اور نئے نئے نتیجے نکالتے جاؤ جبتک وہ نئے نتیجے اُنکے مطابق ہوں جنکا تم صحیح یا

غلط ہونا جانتے ہو

تشکل اتفاقی — اگر مثلث متساوی الساقین ا ب س کے قاعدہ ب س کے کسی نقطہ د سے
عمود د ی اور د ف ضلعوں ا ب اور ا س پر گرائے جائیں تو یہہ دونوں عمود ملکر برابر ہونگے
اُس عمود کے جو قاعدہ ب س پر کے کسی زاویہ سے اُسکے سامنے کے ضلع پر گرایا جائیگا



تحلیل — فرض کرلو کہ شکل کا دعوی جو ہمیں ثابت کرنا ہی
صحیح ہی یعنے عمود د ی اور د ف ملکر برابر ہیں عمود ب ج کے
جو زاویہ ا ب س سے ضلع ا س پر گرایا گیا ہی

دعوی کے فرض کرلینے سے ایک یہہ نتیجہ نکلا کہ ب ج کا کوئی حصہ ج ہ عمود د ف
کے برابر ہی تو دوسرا حصہ ب ہ ضرور عمود د ی کے برابر ہی پھر اگر د ہ ملا دیا تو اس نتیجہ سے
ایک اور نتیجہ نکلا کہ ی د ب اور ہ ب د ایسے دو مثلث ہیں جنکے ضلعے ی د اور ہ ب برابر ہیں
اور ضلع د ب دونوں مثلثوں میں مشترک ہی اور زاویے ی د ب اور ہ ب د قاعدہ کے برابر زاویوں ا ب س اور
ا س ب کے تمامی ہونے کے سبب آپس میں برابر ہیں اور اسلئے یہہ مقابلہ کی چوتھی شکل سے مثلث برابر ہیں
اور [illegible] زاویہ قائمہ ب ی د کے برابر ہی اور اسلئے قائمہ ہی [illegible] ہ ب کے برابر ہی اسلئے اتفاقیہ
[illegible] آپس میں متوازی ہیں اب ہم اس آخر نتیجہ سے شکل کو ترکیب کے طریقہ سے اسطرح ثابت کرتے ہیں

ترکیب — نقطہ د سے د ہ متوازی س ا کا کھینچو — شکل ۳۱

چونکہ د ہ ج ف متوازی الاضلاع ہی اسلئے د ف برابر ہ ج کے — شکل ۳۴

چونکہ زاویہ ب ہ د جو تیسویں شکل سے زاویہ قائمہ ہ ج ب کے برابر ہی اور اسلئے
قائمہ ہی

اسلئے زاویہ ب ہ د زاویہ قائمہ د ی ب کے برابر ہی

اور زاویے د ب ہ اور ی د ب بھی آپس میں برابر ہیں کیونکہ اُنمیں سے ہر ایک مثلث
متساوی الساقین کے قاعدہ پر کے زاویہ کا تمامی قائمہ ہی

اب چونکہ مثلث ہ د ب اور ی د ب میں ایک مثلث کے دو زاویے د ہ ب
اور ہ ب د دوسرے مثلث کے دو زاویوں ب ی د اور ی د ب کے الگ الگ
برابر ہیں اور ضلع ب د دونوں مثلثوں میں مشترک ہے

اسلئے ضلع ب ہ برابر ہے ضلع د ی کے — شکل ۲۶

لیکن یہہ ثابت ہو چکا ہے کہ ج ہ برابر ہے د ن کے

اسلئے د ہ اور د ت ملکر برابر ہیں ب ج کے - یہی ثابت کرنا تھا

تحلیل سے کسی عملی شکل کا عمل دریافت کرنے کا قاعدہ

۱ یاد رکھو کہ اکثر ایسا ہوتا ہے کہ دی ہوئی عملی شکل کا بنانا کئی اور اثباتی یا عملی شکلوں پر موقوف ہوتا ہے اور یہہ اثباتی اور عملی شکلیں اقلیدس کی کسی اثباتی یا عملی شکل پر موقوف ہوتی ہیں

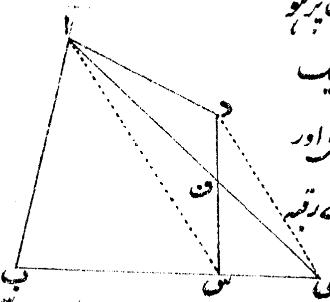
۲ جس عملی شکل کو تمہیں بنانا ہو اُسکو کھینچ لو اور فرض کرلو کہ وہ دعوی کے مطابق کھنچگئی اور بنگئی

۳ پھر اِس کھچی ہوئی شکل کے خطوں اور زاویوں وغیرہ کے آپس کے علاقے دریافت کرو اور دیکھو کہ یہہ دریافت کئے ہوئے علاقے اقلیدس کی کسی عملی یا اثباتی شکل کے مطابق ہیں یا نہیں

۴ اگر یہہ علاقے تم نہ دریافت کرسکو تو اُس کھچی ہوئی شکل میں اور خط متوازی یا عمود کھینچو یا نقطوں کو ملاؤ اور اگر ضرورت پڑے تو دائرے بھی کھینچو اور اسکے بعد دریافت کرو کہ اِن خطوں کے یا زاویوں کے جو اِن خطوں سے بنتے ہیں اور دائروں کے آپس کے علاقے کیا ہیں یا یہہ نئے خط اور زاویے وغیرہ پہلے خطوں اور زاویوں وغیرہ سے کیا علاقے رکھتے ہیں اور پھر دیکھو کہ وہ علاقے اقلیدس کی کسی عملی یا اثباتی شکل میں پائے جاتے ہیں یا نہیں یا اس سے پیدا ہوتے ہیں یا نہیں

۵ اگر اس کوشش سے بھی تمہارا مطلب نہ نکلے تو یہہ نہ سمجھو کہ تمہاری محنت بیفائدہ ہوئی یاد رکھو کہ اکثر ایسا ہوتا ہے کہ اس کوشش سے اور نئی نئی عملی اور اثباتی شکلیں دریافت ہوجاتی ہیں

شکل عملی — ذو اربعۃ الاضلاع اب س د کے برابر ایک ایسا مثلث بناؤ جسکا ایک



ضلع اب ہو اور دوسرا ضلع ب س کی سمت پر ہو

تحلیل - ایسا مثلث اب ی کھینچو جسکا ایک

ضلع اب ہی اور دوسرا ضلع ب س کی سمت پر ہی اور

فرض کرلو کہ اس مثلث کا رقبہ ذوارلبعۃ الاضلاع کے رقبہ

کے برابر ہی

اب اس کھچی ہوئی شکل سے اور مثلث اب ی کو ذوارلبعۃ الاضلاع کے برابر فرض کرنے سے

یہہ نتیجہ نکلا کہ مثلث ا ف د برابر ہی مثلث س ف ی کے اور اُن مثلثوں کے زاویے ا ف د

اور س ف ی پہلے مقالہ کی پندرہویں شکل سے برابر ہیں لیکن یہہ نتیجہ نقطہ ی کا مقام دریافت

کرنے کے لیئے کافی نہیں ہی اسلئے ا س ملایا اس کے ملانے ہی معلوم ہوا کہ اگر مثلث ا ف س

دو برابر مثلثوں ا ف د اور س ف د میں سے ہر ایک میں ملا دیا جاے تو مثلث ا د س برابر ہوگا

مثلث ا ی س کے اور چونکہ یہہ برابر مثلث ایک ہی قاعدہ ا س پر اور اُسکے ایک ہی طرف ہیں

اسلئے اگر د ی ملایا جاۓ تو وہ متوازی ا س کا ہوگا (شکل ۳۹) اسلئے نقطہ ی اُس جگہہ

پر ہی جہاں خط جو متوازی ا س کا نقطہ د سے کھیچا گیا ہی ب س کے بڑھے ہوئے حصہ سے

ملتا ہی اب ہم اس آخر نتیجے سے شکل کو ترکیب کے طریقے سے اس طرح بناتے ہیں

ترکیب - ا س ملاؤ اور د سے د ی متوازی ا س کا اور ب س کے بڑھے ہوئے حصہ

سے نقطہ ی پر ملتا ہوا کھیچو (شکل ۳۱) ا ی ملاؤ - تو مثلث اب ی ذوارلبعۃ الاضلاع اب س د

کے برابر ہی اور اُسکا ایک ضلع اب ہی اور دوسرا ضلع ب س کی سمت پر ہی

چونکہ مثلث ا ی س اور ا د س ایک ہی قاعدہ ا س اور ایک ہی متوازی خطوں ا س اور د ی کے درمیان ہیں

شکل ۳۷

اسلئے مثلث ا ی س برابر ہی مثلث ا د س کے

اِن برابر مثلثوں میں سے ہر ایک میں مثلث ا س ب ملاؤ

اسلئے مثلث اب ی برابر ہی ذوارلبعۃ الاضلاع اب س د کے - اسی مثلث کے بنانے کی ضرورت تھی

پہلے مقالہ کی شکلوں پر متفرق مشق

۱ مثلث ا ب ح کے اندر ع ایک نقطہ ہی ثابت کرو کہ ع ا و ع ب اور ع ح ملکر مثلث کے ضلعوں کے مجموعے سے کم ہیں

۲ ا اور ب دو دائروں کے مرکز ہیں اور ا ع اور ب ق انکے متوازی نصف قطر ہیں اور خط مستقیم ع ق انکے محیطوں سے ر اور ص نقطوں پر ملتا ہی ثابت کرو کہ ا ر اور ب ص متوازی ہیں

۳ مثلث متساوی الاضلاع کے اندر ایک نقطہ ہی اس نقطہ سے جو عمود مثلث کے ضلعوں پر گرائے جائینگے وہ سب ملکر اس عمود کے برابر ہونگے جو مثلث کے کسی زاویہ سے اسکے سامنے کے ضلع پر گرایا جائیگا

۴ اگر ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ح د کی سطح کے قطر ا ح سے دو برابر حصے ہوتے ہیں تو اس سے وتر ب د کے بھی دو برابر حصے ہونگے

۵ پہلے مقالہ کی پانچویں شکل میں اگر ساقین قاعدہ کے نیچے کی طرف بڑھائی جانے کے بجائے راس کے اوپر کی طرف بڑھائی جائیں تو پہلے مقالہ کی بیدہویں شکل کا ثبوت پہلی ہی پانچ شکلوں سے حاصل ہوسکتا ہی

۶ دیے ہوئے خط مستقیم میں ب دیا ہوا نقطہ ہی اور ایک اور دیا ہوا نقطہ اس خط کے باہر ہی دیے ہوئے خط میں ایک ایسا نقطہ ع دریافت کرو کہ ا ع اور ع ب ملکر ایک دی ہوئی لمبائی کے برابر ہوں

۷ خط مستقیم د ی کا سرا د مثلث متساوی الساقین کی ساق ا ب پر ہی اور سرا ی ساق اس کے بڑھے ہوئے حصہ پر ہی اور مثلث کا قاعدہ اس خط کے دو برابر حصے کرتا ہی ثابت کرو کہ د ا اور ا ی ملکر ب ا اور ا ح کے برابر ہیں

۸ جن متوازی الاضلاع کے قطر برابر ہوتے ہیں انمیں معین سب سے بڑا ہوتا ہی

۹ دو برابر خط مستقیم ا س اور ب ذ زاویے قائمے بناتے ہوئے ایک دوسرے کو کہیں

کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع اب س د اُن خطوں میں سے ہر ایک پر کے مربع کی آدھی ہوگی۔

۱۰ دیئے ہوئے مثلث میں ایسی متوازی الاضلاع بناؤ جسکے قطر ایک دوسرے کو دیئے ہوئے نقطہ پر جو مثلث کے اندر ہی کاٹیں

۱۱ مثلث جسکا رقبہ اور دو ضلعے معلوم ہیں بناؤ

۱۲ مثلث جسکا قاعدہ اور دو ضلعوں کا فرق اور قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق معلوم ہی بناؤ

۱۳ اب اور اس دو دیئے ہوئے خط مستقیم ہیں اُنمیں سے ایک میں ایسا نقطہ ع دریافت کرو کہ اگر ع ق عمود دوسرے خط پر گراویں تو اع اور ع ق ملکر دی ہوئی لنبائی کے برابر ہوں

۱۴ دیئے ہوئے محدود خط مستقیم کو قاعدہ بنا کر ایسا مثلث بناؤ جسکے ضلعوں کا فرق معلوم ہی اور جسکا ایک ضلع دیئے ہوئے نقطہ پر ہوکر گذرے

۱۵ مثلث اب س کا ضلع اب ضلع اس سے بڑا ہی اور خط مستقیم اد جو زاویہ ب ا س کے دو برابر حصے کرتا ہی ب س سے نقطہ د پر ملتا ہی ثابت کرو کہ ب د بڑا ہی س د سے

۱۶ اگر مثلث کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ کا تگنا ہی تو وہ مثلث دو مثلث متساوی الساقین میں تقسیم ہو سکتا ہی

۱۷ اگر مثلث کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ کا دونا ہی تو اُس مثلث پر ایک ایسا مثلث متساوی الساقین زیادہ کر سکتے ہیں کہ یہہ دونوں مثلث ملکر ایک مثلث متساوی الساقین بنجائیں

۱۸ مثلث متساوی الساقین اب س کی ساق اب کے بیچوں بیچ کا نقطہ د ہی اور ساق اب قاعدہ ب س کے نیچے کی طرف ی تک اتنی بڑھائی گئی ہی کہ ب ی برابر اب کے ہی ثابت کرو کہ س ی دونا ہی س د سے

۱۹ اُس نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو جسکی ایک دیئے ہوئے نقطہ سے دوری اُسکی دوسرے دیئے ہوئے نقطہ سے دوری کی دونی ہو

۴۰ خط مستقیم اب کے بیچوں بیچ کا نقطہ س ہی اس اور س ب کو قطر بنا کر متوازی الاضلاع ا د س ی اور ب ف س ج بنائے گئے ہیں اور دہ متوازی س ف کا اور ف ہ متوازی س د کا اور ج ك متوازی س ی کا اور ی ك متوازی س ج کا کھینچا گیا ہی ثابت کرو کہ ہ س اور س ك ایک ہی سیدھ میں ہیں

۴۱ مستطیل اب س د کے آمنے سامنے کے زاویے ا اور س ہیں نقطہ ی ضلع ب س میں اور نقطہ ف ضلع س د میں ہی ثابت کرو کہ مثلث ا ی ف کے رقبہ کا دونا اور وہ مستطیل جو اسکے متصل کے ضلع ب ی اور د ف کے برابر ہوں ملکر مستطیل اب س د کے برابر ہونگے

۴۲ ایک ہی قاعدہ ب س پر دو مثلث اب س اور د ب س ہیں اور مثلث اب س کا ضلع اب ضلع اس کے برابر ہی دائرہ جو س اور د نقطوں پر ہوکر گذرتا ہی اسکا مرکزی ضلع س ا پر یا اسکے بڑھے ہوئے حصہ پر ہی اور دائرہ جو ب اور د نقطوں ہوکر گذرتا ہی اسکا مرکز ف ضلع ب ا یا اسکے بڑھے ہوئے حصہ پر ہی ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع ا ی د ف کے دو ضلعے ملکر اسکے باقی دو ضلعوں کے برابر ہیں

۴۳ دو خط مستقیم اب اور اس کے مقام دیئے ہوئے ہیں اب میں ایسا نقطہ ع دریافت کرو کہ اگر اس نقطہ سے اس پر عمود گرایا جائے تو وہ عمود اع سے بقدر ایک دی ہوئی لمبائی کے چھوٹا ہو

۴۴ مسدس متساوی الزوایا کے آمنے سامنے کے ضلعے متوازی ہوتے ہیں اور اسکے کوئی سے دو متصل ضلعے ملکر اپنے متوازی ضلعوں کے برابر ہوتے ہیں (چھہ ضلعے والی شکل کو مسدس کہتے ہیں)

۴۵ مثلث قائم الزاویہ اب س کے وتر ب س پر مربع ب د ی س بنایا گیا ہی اس مربع کے زاویہ ح سے عمود د م مثلث کے ضلع اس پر گرایا گیا ہی اور زاویہ ی سے عمود ی ن ضلع اب پر گرایا گیا ہی ثابت کرو کہ ا م برابر اب کے اور ا ن برابر اس کے ہی

۴۶ مثلث اب س کا زاویہ س قائمہ ہی ایسا خط مستقیم کھینچو جو ایک دیئے ہوئے خط کا

متوازی ہو اور جسکے سرے مثلث کے ضلعوں اس اور ب س پر ہوں اور جسکے بیچوں بیچ کا نقطہ اب میں ہو

۲۷ مثلث اب س متساوی الساقین ہی اُسکا زاویہ ب قاعدہ اس کے ہر ایک زاویہ سے چوگنا ہی اگر اب نقطہ د تک اتنا بڑھایا جائے کہ ب د دونا اب کا ہو اور س د ملایا جائے تو مثلث اس د کے زاویے مثلث اب س کے زاویوں کے الگ الگ برابر ہوں گے

۲۸ متوازی الاضلاع اب س د کے اندر ایک نقطہ ك ہی اس نقطے سے ہ ك ج متوازی اب کا کھینچا گیا ہی اور اُسکا سرا ہ ضلع اد پر اور سرا ج ضلع ب س پر اور اسی نقطہ سے ی ك ف متوازی اد کا کھینچا گیا ہی اور اُسکا سرا ی ضلع اب پر اور سرا ف ضلع س د پر ہی ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ف ج اور ی ہ کا فرق مثلث ب ك د کا دونا ہی

۲۹ مثلث قائم الزاویہ جسکا ایک ضلع اور دوسرے ضلع اور وتر کا فرق معلوم ہی بناؤ

۳۰ کسی مثلث کے زاویوں کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرنیوالے خط مستقیم ایک ہی نقطہ پر ہوکر گذرتے ہیں

۳۱ مثلث اب س کے ضلعوں ب س اور اس کے بیچوں بیچ کے نقطے د اور ی ہیں اور اد اور ب ی ایک دوسرے کو نقطہ ف پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ اف دونا ہی ف د کا اور ب ف دونا ہی ف ی کا

۳۲ مثلث اب س کے زاویوں ا اور ب اور س سے خط مستقیم اد اور ب ی اور س ف ان زاویوں کے سامنے کے ضلعوں کو نقطوں د اور ی اور ف پر دو برابر حصّوں میں تقسیم کرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ تینوں خط کسی ایک ہی نقطہ ج پر ہوکر گذریں گے اور مثلث اج ب اور ب ج س اور س ج ا آپس میں برابر ہوں گے

۳۳ کسی مثلث کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں سے جو خط مستقیم اُن ضلعوں کے ساتھ زاویے قائمے بناتے ہوئے کھینچے جائیں گے وہ سب ایک ہی نقطہ پر ملیں گے

۳۴ مثلث اب س کے ضلعے الگ الگ مثلث دی ف کے ضلعوں کے دونے ہیں یعنی ضلع اب دونا ہی ضلع دی کا اور ضلع ب س ضلع ی ف کا اور ضلع س ا ضلع ف د کا مثلث اب س کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں پر اُن ضلعوں کے ساتھ زاویے قائمے بنانے والے خط مستقیم نقطہ ج پر ملتے ہیں اور مثلث دی ف کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں پر اُن ضلعوں کے ساتھ زاویے قائمے بنانے والے خط مستقیم نقطہ ہ پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ج ا دونا ہوگا ہ د کا اور جو عمود ج سے مثلث اب س کے اب پر ہے دونا ہوگا اُس عمود کا جو ہ سے مثلث دی ف کے ضلع دی پر ہے

۳۵ کسی مثلث کے زاویوں سے جو عمود اُن زاویوں کے سامنے کے ضلعوں پر گرائے جائیں گے وہ سب ایک ہی نقطہ پر ہو کر گذریں گے

۳۶ مثلث اب س کے زاویوں سے جو عمود اُن زاویوں کے سامنے کے ضلعوں پر گرائے گئے ہیں وہ نقطہ ع پر ملتے ہیں اور جو خط مستقیم ضلعوں اب اور ب س اور س ا کے بیچوں بیچ کے نقطوں د اور ی اور ف سے اُن ضلعوں کے ساتھ زاویے قائمے بناتے ہوئے کھینچے گئے ہیں وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ا ع دونا ہی ق کا اور ب ع دونا ف ق کا اور س ع دونا د ق کا

۳۷ کسی مثلث کے زاویوں سے جو عمود اُن زاویوں کے سامنے کے ضلعوں پر گرائے گئے ہیں وہ سب آپسمیں نقطہ ع پر ملتے ہیں اور جو خط مستقیم اُن زاویوں کو اُنکے سامنے کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں سے ملاتے ہوئے کھینچے گئے ہیں وہ سب آپسمیں نقطہ ج پر ملتے ہیں اور جو خط مستقیم اُن ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں پر اُنکے ساتھ زاویے قائمے بناتے ہوئے کھینچے گئے ہیں وہ سب آپسمیں نقطہ ق پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ع اور ج اور ق ایک ہی خط مستقیم میں ہیں

۳۸ پہلے مقالہ کی سینتالیسویں شکل میں ال اور ب ك اور س ف آپسمیں ایک ہی نقطہ

پر ملیں گے

۳۹ وہ خط مستقیم جو ایک مثلث کے زاویوں سے آنکے سامنے کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں تک کھینچے گئے ہیں معلوم ہیں اُس مثلث کو بناؤ

۴۰ مثلث قائم الزاویہ اب س کے زاویہ قائمہ ا کے ایک خط مستقیم دو برابر حصّے کرتا ہی اور ایک اور خط مستقیم نقطہ د پر ضلع ب س کے دو برابر حصّے کرتا ہی اور اُسکے ساتھہ زاویے قایٔے بناتا ہی یہہ دونوں خط مستقیم آپسمیں نقطہ ی پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ دی اور د ا آپسمیں برابر ہیں

۴۱ اب اور ا س ایک دوسرے کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتے ہیں د کوئی نقطہ اب میں ہی اور ی کوئی نقطہ ا س میں ہی دی کو قطر بناکر آدھا مربع جسکا راس ج ہی بنایا گیا ہی ثابت کرو کہ ج کا مقام انقاط وہ خط مستقیم ہی جو زاویہ ب ا س کے دو برابر حصّے کرتا ہی

۴۲ مربع اب س د کے قطر ا س پر مربع کے برابر ایک ایسا معین ا ی ف س بنایا گیا ہی جسکا زاویہ حادہ نقطہ ا پر ہی اگر ا ف ملایا جاے تو زاویہ ب ا س کے تین برابر حصّے ہوجاینگے

۴۳ متوازی الاضلاعوں میں جنکے ضلعوں کا مجموعہ ایک ہی ہی مربع کا رقبہ سب سے بڑا ہوتا ہی

۴۴ دیے ہوے مربع میں ایسا مربع بناؤ جسکا رقبہ ایک دیے ہوئے رقبہ کے برابر ہو اور یہہ بھی بتاؤ کہ دیے ہوئے رقبہ کے لئے کیا قید ہونی چاہیئے

۴۵ اب س ایک مثلث ہی اور اد ایک تہائی اب کی اور ای ایک تہائی ا س کی ہی اور س د اور ب ی ایک دوسرے کو نقطہ ف پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ب ف س مثلث ب ا س کا آدھا ہی اور ذوار بعۃ الاضلاع ا د ف ی مثلث ب د ف اور س ف ی میں سے ہر ایک کے برابر ہی

۴۶ مثلث اب س کا زاویہ س قائمہ ہی زاویہ ا کے ایک خط مستقیم سے جو ب س سے نقطہ د پر ملتا ہی دو برابر حصّے ہوتے ہیں اور زاویہ ب کے ایک اور خط مستقیم سے جو

اس سے نقطہ ی پر ملتا ہے دو برابر حصے ہوتے ہیں یہہ دونوں خط نقطہ ف پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث اف ب ذوار بعۃ الاضلاع اب دی کا آدھا ہے

۴۷ مثلث مختلف الاضلاع ایسے دو حصوں میں تقسیم نہیں ہو سکتا کہ وہ حصے ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیں

۴۸ متوازی الاضلاع اب س د او اس ی د برابر قاعدوں ب س اور س ی پر اور ایک ہی متوازی خطوں ا د اور ب ی کے درمیان ہیں اور ب د اور ا ی ایک دوسرے کو نقطہ ف پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ ب ف دونا ہے ف د کا اور ی ف دونا ف ا کا

۴۹ ذوار بعۃ الاضلاع اب س د کے ضلعے اب اور س د متوازی ہیں اور اُسکے وتر اس اور ب د ایک دوسرے کو نقطہ ی پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ نقطہ ی اُس خط کے دو برابر حصے کریگا جو اُس نقطہ سے متوازی اب کا ذوار بعۃ الاضلاع میں کھیچا جائیگا

۵۰ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان اور ایک ہی قاعدہ یا برابر قاعدوں پر دو مثلث ہیں ثابت کرو کہ خط مستقیم جو قاعدہ کا متوازی کھچا جائے اُسکے حصے جو مثلثوں کے اندر ہوں گے آپسمیں برابر ہونگے

۵۱ مثلث قائم الزاویہ میں مربع بناؤ ۔

۵۲ کسی مثلث میں مربع بناؤ

۵۳ مثلث میں ایسا معین بناؤ جسکا ایک زاویہ اُس مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو

۵۴ مثلث میں ایسا معین بناؤ جسکا ایک زاویہ کسی دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

۵۵ مثلث اب س میں زاویہ ا قائمہ ہے اور ضلع ا س ضلع اب کا دونا ہے ثابت کرو کہ زاویہ ب زاویہ س کے دونے سے بڑا ہوگا

۵۶ کسی مثلث کے ایک زاویہ سے ایسا خط مستقیم کھیچو جو اُس مثلث میں سے دیا ہوا رقبہ کاٹے ۔

۵۷ متوازی الاضلاع کے کسی زاویہ سے ایسے خط مستقیم کھیچو جو اُسکے تین برابر حصے کریں ۔

۵۸ مثلث کے کسی ضلع میں کوئی نقطہ دیا ہوا ہی اُس نقطہ سے ایسے خط مستقیم کھینچو جو مثلث کے تین برابر حصے کریں

۵۹ مستقیم الاضلاع کے کسی ضلع میں کوئی نقطہ دیا ہوا ہی بتاؤ کہ اُس نقطہ سے کسطرح خط مستقیم کھینچکر مستقیم الاضلاع کے جتنے برابر حصے چاہیں کرسکتے ہیں

۶۰ ا ہ ک مثلث متساوی الاضلاع ہی اور ا ب س د ایک ایسا معین ہی جسکا ضلع مثلث کے ضلع کے برابر ہی اور جسکے ضلعے ب س اور س د نقطوں ہ اور ک پر ہوکر گذرتے ہیں ثابت کرو کہ معین کا زاویہ ا د س قائموں کا نواں حصہ ہی

۶۱ پہلے مقالہ کی بتیسویں شکل میں دو متوازی الاضلاع کے دو قطر جنمیں سے ایک قاعدہ کے ایک سرے سے اور دوسرا قاعدہ کے دوسرے سرے سے کھینچا گیا ہی نقطہ ج پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور اُن متوازی الاضلاع کے ضلعے یوں ہی یا بڑھکر نقطہ ہ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ خط مستقیم ج ہ یوں ہی یا بڑھکر قاعدہ کے دو برابر حصے کریگا

۶۲ مثلث کا قاعدہ اور اُسکے ضلعوں کا فرق معلوم ہی اور قاعدہ کے کسی سرے سے اُس خط پر عمود گرایا گیا ہی جو قاعدہ کے سامنے کے زاویہ کے دو برابر حصے کرتا ہی اُس نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو جسپر یہہ عمود اُس خط سے ملتا ہی

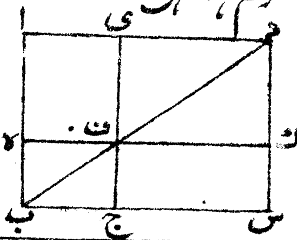
۶۳ مثلث کا قاعدہ اور اُسکے ضلعوں کا مجموعہ معلوم ہی اور قاعدہ کے کسی سرے سے اُس خط پر عمود گرایا گیا ہی جو راس کے زاویہ خارجہ کے دو برابر حصے کرتا ہی اُس نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو جسپر یہہ عمود اُس خط سے ملتا ہی فقط

دوسرا مقالہ

حدود

۱ ہر متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کو قائم الزوایا کہتے ہیں اور اُسکو یوں بیان کرتے ہیں کہ وہ اُن دو خط مستقیم سے گھری ہوئی سطح ہی جنمیں اُسکا ایک زاویۂ قائمہ بنا ہوا ہی
مثلاً قائم الزوایا اس کو اسطرح بیان کرتے ہیں کہ وہ اب اور ب س سے جنمیں اُسکا زاویہ اب س بنا ہوا ہی گھری ہوئی سطح ہی یا کسی اور دو خط مستقیم سے جنمیں اُسکے اور زاویے بنے ہوئے ہیں یعنی ب س اور س د سے یا س د اور د ا سے یا د ا اور اب سے گھری ہوئی سطح ہی اختصار کے لئے ہم اب اور ب س سے گھری ہوئی سطح کے عوض سطح اب × ب س یا سطح اب . ب س لکھتے ہیں یعنی اُن دو خط مستقیم کے درمیان جنمیں وہ گھری ہوئی ہی ضرب کا نشان یا ایک نقطہ جو ضرب کے نشان کے بجائے استعمال ہوتا ہی لکھتے ہیں ضرب کے نشان اور نقطہ کے لکھنے کی وجہ ہم کسیقدر پہلے مقالہ کے چھتیسویں شکل کی شرح میں بیان کر چکے ہیں اور آگے مفصل بیان کرینگے ۔ حال کے مہندس اب اور ب س سے گھری ہوئی سطح کے عوض صرف سطح اب ب س ہی لکھتے ہیں

۲ ہر متوازی الاضلاع میں اُسکے قطر کے گرد جو متوازی الاضلاع ہوں اُنمیں سے ہر ایک متوازی الاضلاع اور دو متمم تینوں ملکر علم کہلاتا ہی



مثلاً متوازی الاضلاع ہ ج اور دو متمم اف اور ف س تینوں ملکر علم ہی اور اختصار کے لئے اُسکو حروف اج ك یا ی ہ س سے

یعنی اُن حروف سے بیان کرتے ہیں جو اُن متوازی الاضلاعوں کے جنسے وہ علم بنتا ہی آمنے سامنے کے زاویوں پر لکھے ہوتے ہیں اسی طرح متوازی الاضلاع ی ك اور وہی دو قسم اف اور ف س تینوں ملکر علم ہی اور وہ حروف اك ج ب س ی ہ سے بیان ہوتا ہی جو اُن متوازی الاضلاعوں کے آمنے سامنے کے زاویوں پہ لکھے ہوئے ہیں جنسے وہ علم بنتا ہی

علوم متعارفہ

١ کُل اپنے سب حصّوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہی

اُقلیدس نے اس علوم متعارفہ کو نہیں لکھا ہی لیکن اس مقالہ کی شکلوں کے ثابت کرنے میں اسکا اکثر جگہہ استعمال کیا ہی

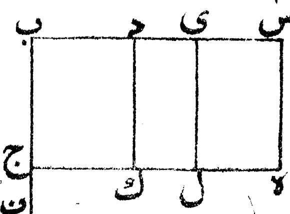
٢ اگر دو چیزیں آپسمیں برابر ہوں تو دونوں ملکر اُنمیں سے ہر ایک کی دونی ہونگی

اقلیدس نے اس علوم متعارفہ کو بھی نہیں لکھا ہی لیکن اسکا استعمال پہلے مقالہ کی بیالیسویں شکل کے ثابت کرنے میں اور خاص کر اس مقالہ میں اکثر جگہہ کیا ہی

شکل ١ اثباتی

اگر دو خط مستقیم میں سے ایک خط کئی حصّوں میں تقسیم کیا جاے تو سطح دونوں خط مستقیم کی برابر ہوگی اُن سب سطحوں کے مجموعہ کے جو خط غیر منقسم اور خط منقسم کے ہر حصہ سے بنتی ہیں

فرض کرو کہ ا اور ب س دو خط مستقیم ہیں جنمیں سے ب س نقطوں د اور ی پر کئی حصّوں ب د اور د ی اور ی س میں تقسیم ہوا ہی



تو سطح ا اور ب س کی برابر ہوگی اُن سب سطحوں کے مجموعہ کے جو ا اور ب د سے اور ا اور د ی سے اور ا اور ی س سے بنتی ہیں

نقطہ ب سے ب ف خط ب س کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو شکل ۱ مقالہ ۱

اور ب ج برابر ا کے بناؤ شکل ۳ مقالہ ۱

نقطہ ج سے ج ہ متوازی ب س کا اور نقطوں د اور ی اور س سے د ك

اور ی ل اور س ہ متوازی ب ج کے اور ج ہ سے نقطوں ك اور ل اور ہ پر

ملتے ہوئے کھینچو شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب سطح ب ہ برابر ہے سطحوں ب ك اور د ل اور ی ہ کے علوم متعارفہ مقالہ ۱

لیکن ب ہ ہے سطح ا اور ب س کی کیونکہ وہ گھری ہوئی ہے ج ب اور ب س

سے جنمیں سے ج ب برابر ہے ا کے

اور د ل ہے سطح ا اور ب د کی کیونکہ وہ گھری ہوئی ہے ج ب اور ب د سے

جنمیں سے ج ب برابر ہے ا کے

اور د ل ہے سطح ا اور د ی کی کیونکہ د ك یعنی ب ج (شکل ۳۴ مقالہ ۱) برابر ہے

ا کے

اور اسی طرح ی ہ ہے سطح ا اور ی س کی

اسلئے سطح ا اور ب س کی برابر ہے اُن سب سطحوں کے مجموعہ کے جو ا اور

ب د سے اور ا اور د ی سے اور ا اور ی س سے بنتی ہیں

اسلئے اگر دو خط مستقیم میں سے الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس مقالہ میں اقلیدس نے اُن سطحوں کے آپس کے علاقے بیان کئے ہیں جو خطوں کے

مختلف حصّوں سے بنتی ہیں

جب ایک خط مستقیم دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کو اقلیدس نے اُس خط کا حصّہ

کہا ہے مگر لفظ حصہ کے معنی کو ھنڈ سون نے زیادہ وسعت دی ہے اور اسلئے اُسکی یہہ تعریف لکھی ہے کہ اگر

کسی دیے ہوئے خط مستقیم پر یوں ہی یا اُسے بڑھا کر بڑھے ہوئے ٹکڑے پر کوئی نقطہ مقرر کریں تو اُن

خطوں میں سے جو اُس نقطہ اور دیے ہوئے خط مستقیم کے ہر سرے کے درمیان واقع ہوں ہر ایک کو دیے ہوئے خط کا حصہ کہتے ہیں اور ضرورت کے وقت تمیز کرنے کے لئے جب نقطہ خط کے بڑھے ہوئے ٹکڑے پر ہی تو خط کے حصوں کو خارجی حصے کہتے ہیں اور جب نقطہ خط میں ہی ہو تو اُسکے حصوں کو داخلی حصے کہتے ہیں

پیشتر اسکے کہ طالب علم دوسرا مقالہ شروع کرے اُسکو یہہ جاننا ضرور ہی کہ علم ہندسہ کو علم حساب وجبر مقابلہ سے کیا نسبت ہی چونکہ علم ہندسہ میں مقدار متصل یعنی خط اور سطح اور جسم سے بحث کیجاتی ہی اور حساب و جبر مقابلہ میں مقدار منفصل یعنی عدد سے بحث ہوتی ہی اسلئے علم ہندسہ اور حساب و جبر مقابلہ کی مناسبت بخوبی سمجھنے کے لئے طالب علم کو ضرور ہی کہ پہلے مقدار متصل اور منفصل کی مناسبت جانے فرض کرو کہ اب ایک خط ہی جسکی لنبائی معلوم ہی

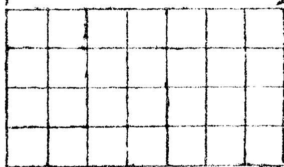
ب ی س د ا

اُسکے نقطہ س پر دو برابر حصے کرو اور پھر اس کے نقطہ د پر اور س ب کے نقطہ ی پر دو دو برابر حصے کرو اب ایسے چار برابر خط ا د اور د س اور س ی اور ی ب ہو گئے جو ملکر دیے ہوئے خط اب کے برابر ہیں اور چونکہ یہہ چاروں خط آپسمیں برابر ہیں اُنمیں سے ہر ایک کا چوگنا اُن چاروں خطوں کے اور نیز اصل خط اب کے برابر ہوگا پس اب کی لنبائی ظاہر کرنے اور سمجھنے کے دو طریقے ہوئے یوں بھی کہہ سکتے ہیں اور سمجھہ میں لا سکتے ہیں کہ وہ اُن چار خطوں کے برابر ہی جنمیں سے ہر ایک ا د کے برابر ہی اور یوں بھی کہ وہ اب ہی یعنی خود ہی اُس خط کو بغیر ٹکڑے کئے ہوئے سمجھہ سکتے ہیں اور بیان کر سکتے ہیں اور نیز اُسکو چند برابر حصوں میں منقسم خیال کرکے تصور اور بیان میں لا سکتے ہیں کہ وہ خط ہر ایک حصہ کی لنبائی کا اُتنا گُنا ہی جتنے حصوں میں اُسے منقسم خیال کیا گیا ہی - ان حصوں میں سے ہر ایک حصہ کو ہم پیمانہ کہتے ہیں اور اُس طریقہ کو جس سے ہم یہہ دریافت کرتے ہیں کہ فلاں خط میں ایسے ایسے پیمانہ کتنے ہیں اُس خط کا ناپنا کہتے ہیں اگر یہہ پیمانہ کسی خط کو پورا پورا ناپ دے یعنی یہہ پیمانہ چند بار لینے سے اُس خط کے برابر ہو جاوے تو اُس پیمانہ کو اُس خط کا مقسوم علیہ کہیں گے پس اگر وہی پیمانہ کسی دوسرے اور خط کو پورا پورا ناپ دے تو وہ پیمانہ

اِن دونوں خطوں کا مقسوم علیہ مشترک کہلاویگا اور وہ خط مقدار متوافقہ کہلاوینگے - یہہ پیمانہ ایک فرضی مقدار ہی لیکن جب اُسکو ایک دفعہ مقرر و معین کرلیا تو پھر وہ بدل نہیں سکتا مثلاً ہمکو اختیار ہی کہ ہم اپنے پیمانہ کی لنبائی خواہ ایک گز یا ایک فٹ یا ایک انچھ مقرر کریں لیکن مقرر کرنے کے بعد ہمیں اُسی کا پابند رہنا چاہیئے اور ہر ایک خط کی لنبائی اُسی پیمانہ سے ناپنی چاہیئے یعنی دریافت کرنا چاہیئے کہ ہر ایک خط اُس پیمانہ سے کی گنا ہی - پس یہاں سے مقدار متصل اور مقدار منفصل کی مناسبت ظاہر ہوتی ہی یعنی یہہ امر دریافت ہوتا ہی کہ عدد ایک آلہ ہی جسکے ذریعہ سے ہم یہہ دریافت کرسکتے ہیں کہ فلاں مقدار کتنی ہی یعنی کس عدد سے اُسکا اندازہ کرسکتے ہیں اگر عدد نہو تو ہم کسی مقدار کو بلا اُسکے یا آسکی ناپ کے دکھلائے نہیں ظاہر کرسکتے ہیں عدد ہی کے ذریعہ سے ہر ایک خط کی لنبائی کو کسی خاص لنبائی سے جسکو ہم خوب جانتے ہیں اور جسکو پیمانہ کہتے ہیں مقابلہ کرکے اس خط کی لنبائی کو اسطرح بیان کرتے ہیں کہ وہ اُس پیمانہ کی اِتنی بار ہی - اب تک ذکر ایسے خط کا تھا جسکو کوئی خاص پیمانہ پورا پورا ناپ سکتا تھا لیکن اب ہم ایسا خط فرض کرتے ہیں جسکو کوئی خاص پیمانہ پورا پورا نہ ناپ سکے مثلاً خط

اب ——ا——س——د——ی——ف——ب—— اسمیں سے اگر ہم اس اور س د اور دی اور ی ف برابر اُس پیمانہ کے کاٹتے ہیں تو آخر کو ایک حصہ ف ب باقی رہجاتا ہی جو ہمارے فرض کئے ہوئے پیمانہ سے چھوٹا ہی اِسصورت میں دیے ہوئے خط کی مقدار کیسے دریافت ہوسکتی ہی یاد رکھو کہ اُسکے دریافت کرنیکا طریقہ یہہ ہی کہ اُس پیمانہ کے برابر برابر حصّے کرتے چلے جاؤ یہانتک کہ دیے ہوئے خط کا بچا ہوا حصّہ اُس پیمانہ کے آخر حصّہ کے برابر یا اُسکے چند بار ہو فرض کرو کہ اصل پیمانہ ہمارا ایک گز ہی اور اُس سے اگر ہم ایک دیے ہوئے خط کو ناپیں تو وہ پیمانہ کے چند بار لینے سے پورا پورا نہیں ناپ سکتا ہی پیمانہ کا چار بار لینے کے بعد ایک حصہ اُس خط کا جو پیمانہ معینہ سے چھوٹا ہی بچ رہتا ہی لیکن اگر ہم اُس پیمانہ کو سولہہ برابر حصّوں میں تقسیم کریں تو معلوم ہوتا ہی کہ باقی حصّہ بھی اُس پیمانہ کے سولہویں حصہ کا پچگنا ہی اسصورت میں ہم اصل خط کی لنبائی کو اسطرح ظاہر کرتے ہیں کہ وہ (۱۶ × ۴ + ۵) یعنی ۶۹ پیمانہ ہی اُس پیمانہ سے جو ہمارے فرض کئے ہوئے پیمانہ یعنی گز کا سولہواں حصّہ ہی اور اِس طریقہ سے

یعنی پیمانہ کو چھوٹا کرنے سے ہم دو یا زیادہ خطوں کو ایک ہی پیمانہ سے ناپ سکتے ہیں مثلاً چار گز اور پانچ
گز تین گرہ کی لنبائی ایک ہی پیمانہ سے جسکی لنبائی ایک گرہ ہی ناپ سکتی ہی لیکن بعض اوقات ایسا ہوتا ہی
کہ دو خط ایک پیمانہ سے گو وہ پیمانہ کیسا ہی چھوٹا کر دیا جاوے نہیں ناپ سکتے ہیں مثلاً کسی مربع کا ضلع اور اُسکا
وتر اور نیز دائرہ کا قطر اور اُسکا محیط ایک ہی پیمانہ سے نہیں ناپ سکتے ہیں ایسی مقداروں کو مقادیر
متباینہ کہتے ہیں ہم نے ابتک صرف ایک قسم کی مقدار یعنی صرف خطوں کا بیان کیا ہی لیکن ہر قسم کی
مقدار کا خواہ وہ سطح ہو یا جسم ہو یا زاویہ ہو اسیطرح پر اندازہ ہو سکتا ہی ہاں اتنا ضرور ہی کہ جو پیمانہ ہم
فرض کریں وہ اُسی قسم کا ہو جس قسم کی مقدار کا ہم اندازہ کرنا چاہتے ہیں یعنی سطحوں کے ناپنے کے لئے
پیمانہ سطح ہو اور جسم کے ناپنے کے لئے جسم اور زاویہ کے ناپنے کے لئے زاویہ۔ اِن سب صورتوں میں
مثل خطوں کے پیمانہ فرضی ہی اور سطح کے ناپنے کے لئے ہر قسم کی سطح پیمانہ ہو سکتی ہی خواہ وہ مستطیل
ہو یا مربع یا مثلث لیکن مروج اور زیادہ سہل پیمانہ وہ مربع ہی جسکے ضلع کی لنبائی پیمانہ طولانی کی
لنبائی کے برابر ہی اور جسم کے ناپنے کے لئے پیمانہ ایک مکعب ہی جسکی ہر ایک حد سطح مستوی پیمانہ سطح
ہی مثلاً اگر خطوں کے لئے ایک فٹ طول پیمانہ مقرر کیا جائے تو ایک مربع فٹ سطحوں کے ناپنے کے
لئے اور ایک مکعب فٹ جسموں کے ناپنے کے لئے مقرر ہوگا فرض کرو



کہ اب س د ایک مستطیل ہی جسکے دو ضلعوں اب
اور اد کی لنبائی ایک ہی پیمانہ سے اندازہ ہو سکتی ہی
یعنی اب پورا پورا چار پیمانہ ہی اور اد پورا پورا
سات پیمانہ ہی پس اگر اب کو چار حصوں میں تقسیم کیا جاوے اور اد کو سات برابر حصوں میں
اور اب کے نقطوں تقسیم سے اد کی متوازی اور اد کے نقطوں تقسیم سے اب کے متوازی
خط کھینچے جاویں تو صاف ظاہر ہی کہ جتنے حصے اُس مستطیل کے اِن خطوں کے کھینچنے سے ہونگے
اُنمیں سے ہر ایک حصہ ایک مربع پیمانہ ہی اور چونکہ ہر مستطیل کا رقبہ جتنے پیمانے اُس مستطیل میں ہوتے ہیں
اُنکے شمار سے دریافت ہوتا ہی پس مستطیل اب س د کا رقبہ بھی بشمار اُن مربعوں کے جنمیں وہ متوازی خطوں

کھینچنے سے تقسیم ہوا ہی قرار پائے گا جب ہم یہہ دیکھتے ہیں کہ پڑے ہوے خط جو ا د کے متوازی
ہیں مستطیل کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور کھڑے خط جو ا ب کے متوازی ہیں
اُن برابر حصوں میں سے ہر ایک کے سات برابر حصے کرتے ہیں تو کل چھوٹے حصوں کا
شمار سات کا چوگنا لینے سے یعنی سات کو چار سے ضرب دینے سے معلوم ہو جائیگا پس کسی
مستطیل کے مربع پیمانوں کا شمار دریافت کرنے کے لئے ہمیں اُن دو عددوں کو آپس میں ضرب دینا چاہیے
جو اُن پیمانوں کا شمار جو مستطیل کے دو متصل ضلعوں میں ہیں ظاہر کرتے ہیں جب سطح مربع ہی ہو تو اُسکے
سب ضلعے آپس میں برابر ہیں یعنی ہر ایک ضلع میں پیمانوں کا شمار ایک ہی ہے اسلئے اُس مربع میں مربع
پیمانوں کا شمار دریافت کرنیکے لئے اس عدد کو جو اُسکے ایک ضلع کے پیمانے طولانی کے شمار کو ظاہر
کرتا ہے اُسی عدد کے ضرب دو اور یہی سبب ہے کہ لفظ مربع علم حساب و جبر مقابلہ میں اُس حاصل ضرب کا نام ہے
جو کسی عدد کو اپنی ذات میں ضرب دینے سے حاصل ہو لیکن طالبعلم کو یاد رکھنا چاہیئے کہ علم ہندسہ میں لفظ
مربع جس معنی میں بولا جاتا ہے وہ معنی علم حساب و جبر مقابلہ میں نہیں لئے جاتے ہیں بلکہ علم ہندسہ میں
مربع اسکو کہتے ہیں جو ایک خط پر بنایا جاوے اور علم حساب و جبر مقابلہ میں مربع اُس حاصل ضرب کا نام ہے جو
ایک عدد کو اپنے ہی آپ میں ضرب دینے سے حاصل ہو مثلاً اگر ب کسی مربع کے ضلعوں کے پیمانوں کی
تعداد کو ظاہر کرے تو حاصل ضرب ب کا جب وہ اپنی ذات سے ضرب دیا جاتا ہے یعنی ب × ب
یا ب٢ مربع کے مربع پیمانوں کی تعداد کو ظاہر کریگا اور اسی طرح پر اگر ب اور س کسی مستطیل کے
دو متصل ضلعوں کے پیمانوں کی تعدادوں کو بیان کریں تو حاصل ضرب ب اور س کا یعنی
ب × س مستطیل کے مربع پیمانوں کی تعداد کو بیان کریگا پس معلوم ہوا کہ اُن اصولوں کے
ذریعہ سے جو ہم نے اوپر بیان کئے ہر مستطیل کی سطح کی مقدار کو بیان کر سکتے ہیں اور اسکی سب
خاصیتوں پر جنپر علم ہندسہ کی رو سے بحث ہوتی ہے جبر مقابلہ کی رو سے بحث کر سکتے ہیں لیکن ب
ب اور س کی جگہہ پر کوئی خاص قیمت ٢ یا ٣ یا ٤ وغیرہ لکھنا چاہیں تو بعض اوقات ایسا معلوم
ہوتا ہے کہ دو مقداریں جنکو ہم ب اور س سے بیان کرتے ہیں متباینہ ہیں اور انکو ایسی صورت میں

کوئی مقسوم علیہ یا پیمانہ مشترک گو وہ کیسا ہی چھوٹا لیا جاوے نہیں دریافت ہو سکتا ہی جسکے ذریعے ہم اُس مستطیل کے ضلعوں کی لنبائی کا اندازہ کر سکیں اسلئے اسصورت میں کوئی خاص قیمت ب اور س کی جگہہ پر نہیں استعمال کر سکتے ہیں اور اسلئے اُس مستطیل کا رقبہ حساب کی روسے ٹھیک نہیں دریافت ہو سکتا ہی

ابچونکہ مقدار متصل اور منفصل کی مناسبت اور نیز انکا فرق ظاہر ہوچکا ہم اس کتاب میں دوسرے مقالہ کی اُن شکلوں کا جنکا جبر مقابلہ سے ثبوت حاصل ہو سکتا ہی ثبوت جبریہ اُن کے آگے لکھیں گے۔

پہلی شکل کا ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ خط ب س کی لنبائی ا پیمانہ ہی اور خط ا کی لنبائی ب پیمانہ ہی اور ب د اور د ی اور ی س حصّوں کی لنبائی ترتیب وار م اور ن اور ک پیمانہ ہی

چونکہ کل اپنے سب حصّوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہی

اسلئے ا = م + ن + ک

اگر ان برابروں میں سے ہر ایک کو ب سے ضرب دیا

تو ا × ب = ب × (م + ن + ک

اسلئے ا × ب = ب × م + ب × ن + ب × ک

اسلئے حاصل ضرب اُن دو عددوں کا جنمیں سے ایک کئی حصّوں میں تقسیم ہوا ہی برابر ہی اُن حاصلضربوں کے مجموعہ کے جو غیر منقسم عدد کو منقسم عدد کے ہر ایک حصّہ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی (اگر ان حاصلضربوں کے معنی علم ہندسہ کی روسے خیال کئے جاویں) مربع پیمانوں کا شمار جو حاصلضرب ا × ب سے بیان ہوتا ہی برابر ہی اُن مربع پیمانوں کے شمار کے جو حاصلضربوں ب × م اور ب × ن اور ب × ک کے مجموعہ سے بیان ہوتا ہی

مشق

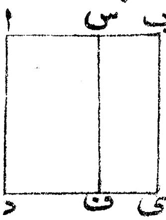
اگر دو خط مستقیم میں سے ہر ایک کئی کئی حصّوں میں تقسیم ہو تو سطح دو خط مستقیم کی برابر ہو گی

اُن سب سطحوں کے مجموعہ کے جو ایک خط کے سب حصے علیحدہ علیحدہ دوسرے خط کے سب حصوں کے ساتھہ بناتے ہیں

شکل ۲ اثنانی

اگر کوئی خط مستقیم دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سطحیں جو کُل خط اور اُسکے ہر حصہ سے بنتی ہیں ملکر برابر ہوں گی کُل خط پر کے مربع کے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو سطح ا ب اور ب س اور سطح اب اور ا س کی ملکر برابر ہوگی اب پر کے مربع کے



اب پر مربع اد ی ب بناؤ (شکل ۴۶ مقالہ ۱) اور نقطہ س سے س ف متوازی اد یا ب ی کا کھینچو شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب ای برابر ہی سطحوں قائم الزاویہ اف اور س ی کے

لیکن ای خط اب پر کا مربع ہی

اور اف ہی سطح ب ا اور ا س کے کیونکہ وہ ہی سطح د ا اور ا س کی جنمیں سے د ا برابر ہی اب کے

اور س ی ہی سطح اب اور ب س کی کیونکہ ب ی برابر ہی اب کے

اسلئے سطح اب اور ا س اور سطح اب اور ب س کی ملکر برابر ہیں اب پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل اس مقالہ کی پہلی شکل کی ایک خاص صورت ہی پہلی شکل میں اگر دونوں خط مستقیم آپسمیں برابر ہوں اور انمیں سے ایک دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہو تو پہلی شکل اور یہہ شکل ایک ہو جائیگی

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ اب طول میں ا پیمانہ ہی اور ا س اور س ب ترتیب وار م اور ن پیمانہ ہیں

تو $م + ن = ا$

ان برابر چیزوں میں سے ہر ایک کو اسے ضرب دو

اسلئے ا × م + ا × ن = ا^۲

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم کیا جاے تو حاصلضرب کل عدد اور اسکے ہر ایک حصہ کے

ملکر برابر ہوتے ہیں کل عدد کے مربع کے

مشق

کسی خط مستقیم پر کا مربع اس خط کے آدھے پر کے مربع کا چوگنا ہوتا ہی

شکل ۳ اثباتی

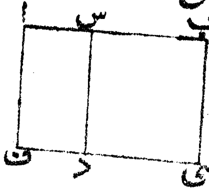
اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصوں میں تقسیم کیا جاے تو سطح جو کل خط او اسکے کسی

ایک حصہ سے بنتی ہی برابر ہوگی اس حصہ پر کے مربع اور اس سطح کے مجموعہ کے جو خط کے

دونوں حصوں سے بنتی ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو سطح

اب اور ب س کی برابر ہوگی ب س پر کے مربع اور سطح اس اور س ب کے مجموعہ کے



ب س پر مربع س د ی ب بناؤ شکل ۴۶ مقالہ ۱

اور ی د کو ف تک بڑھا کر نقطہ ا سے اف

متوازی س د یا ب ی کا کھینچو شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب قائم الزاویہ اے برابر ہی سطحوں قائم الزاویہ اد اور س ی کے علوم متعارفہ مقالہ ۱

لیکن اے ہی سطح اب اور ب س کی کیونکہ وہ ہی سطح اب اور ب ی کی

جنمیں سے ب ی برابر ہی ب س کے

اور اد ہی سطح اس اور س ب کی کیونکہ س د برابر ہی س ب کے

اور س ی مربع ب س پر کا ہی

اسلئے سطح اب اور ب س کی برابر ہی ب س پر کے مربع اور سطح اس

اور س ب کے مجموعہ کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ ۔ یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل بھی اس مقالہ کی پہلی شکل کی ایک خاص صورت ہے پہلی شکل میں اگر ایک خط مستقیم دو حصوں میں منقسم ہو اور ان حصوں میں سے ایک حصہ دوسرے خط مستقیم کے برابر ہو تو پہلی شکل اور یہہ شکل ایک ہو جائیگی

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ اب طول میں ا پیمانہ ہے اور ب س طول میں م پیمانہ اور اس طول میں ن پیمانہ

تو ا = م + ن

ان برابر چیزوں کو م سے ضرب دو

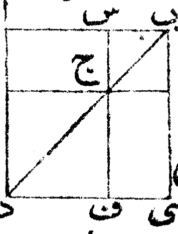
اسلئے م × ا = م۲ + م × ن

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم کیا جاے تو حاصلضرب کل عدد اور اسکے ایک حصہ کا برابر ہوتا ہے اس حصہ کے مربع اور حاصلضرب دونو حصوں کے مجموعہ کے

شکل ۴ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصوں میں تقسیم کیا جاے تو کل خط پر کا مربع برابر ہوگا دونوں حصوں پر کے مربعوں معہ اس سطح کی دونی کے جو ان حصوں سے بنتی ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہے تو اب پر کا مربع برابر ہوگا اس اور س ب پر کے مربعوں معہ دونی سطح اس اور س ب کے



اب پر مربع ادی ب بناؤ شکل ۴۶ مقالہ ۱

اور ب د کو ملاؤ اور س نقطہ سے س ج ف متوازی ادیا ب ی کا اور ب د سے نقطہ ج پر اور دی سے نقطہ ف پر ملتا ہوا کھینچو

شکل ۳۱ مقالہ ۱

اور ج نقطہ سے ہ ج ك متوازی اب یا دی کا اور ا د سے نقطہ ہ پر اور
ب ی سے نقطہ ك پر ملتا ہوا کھینچو
شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب چونکہ س ف متوازی ہی ا د کا اور ب د انپر گرتا ہی
اسلئے زاویہ خارجہ ب ج س برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ب د ا کے
شکل ۲۹ مقالہ ۱

لیکن زاویہ ب د ا برابر ہی زاویہ د ب ا کے (شکل ۵ مقالہ ۱) کیونکہ ب ا اور ا د
مربع کے ضلعے ہونے کی وجہ سے آپسمیں برابر ہیں
اسلئے زاویہ س ج ب برابر ہی زاویہ س ب ج کے
علوم متعارفہ مقالہ ۱

اسلئے ضلع ب س برابر ہی ضلع س ج کے
شکل ۶ مقالہ ۱

لیکن ب س برابر ہی ج ك کے اور س ج برابر ب ك کے
شکل ۳۴ مقالہ ۱

اسلئے شکل س ج ك ب متساوی الاضلاع ہوئی
اور ایسے ہی وہ قائم الزوایا بھی ہی
کیونکہ جب س ج متوازی ب ك کا ہی اور ب س انپر گرتا ہی تو زاویے ك ب س
اور ب س ج ملکر برابر دو قائموں کے ہیں
شکل ۲۹ مقالہ ۱

لیکن زاویہ ك ب س ایک زاویہ قائمہ ہی
حد ۳۰ مقالہ ۱

اسلئے زاویہ ب س ج بھی ایک قائمہ ہی
اور اسلئے زاویے س ج ك اور ج ك ب بھی جو انکے سامنے ہیں قائمے
ہیں
شکل ۳۴ مقالہ ۱

اسلئے س ج ك ب قائم الزوایا ہی اور وہ متساوی الاضلاع پہلے ثابت
ہو چکی ہی
اسلئے وہ مربع ضلع ب س پر ہی
اور ایسی ہی دلیل سے ہ ف مربع ہ ج پر ہی اور ہ ج برابر اس کے ہی
شکل ۳۴ مقالہ ۱

اسلئے ہ ف اور س ک مربعے اس اور ب س پر ہوئے

اور چونکہ تتمہ اج برابر ہی متمم ج ی کے

اور اج ہی سطح اس اور س ب کی کیونکہ ج س برابر ہی س ب کے

اسلئے ج ی برابر ہی سطح اس اور س ب کے علوم متعارفہ ۱ مقالہ ۱

اسلئے اج اور ج ی ملکر برابر ہیں سطح اس اور س ب کی دونی کے

اور ہ ف اور س ک مربعے ہیں اس اور س ب پر کے

اسلئے چار شکلیں ہ ف اور س ک اور اج اور ج ی برابر ہیں اس اور س ب پر کے مربعوں کے اور سطح اس اور س ب کی دونی کے

لیکن ہ ف اور س ک اور اج اور ج ی ملکر کل شکل ا د ی ب کو جو اب پر کا مربع ہی بناتی ہیں

اسلئے اب پر کا مربع برابر ہی اس اور س ب پر کے مربعوں معہ دونی سطح اس اور س ب کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح ۔ اس شکل کے ثبوت سے صاف ظاہر ہی کہ مربع کے قطر کے گرد کے متوازی الاضلاع بھی مربع ہوتے ہیں

اس شکل کو اسطرح بھی ثابت کرسکتے ہیں

فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب پر کا مربع برابر ہوگا اس اور س ب پر کے مربعوں معہ دونی سطح اس اور س ب کے

اب پر مربع ا د ی ب بناؤ شکل ۴۶ مقالہ ۱

اد میں سے ا ہ برابر ب س کے کاٹو تو ہ د برابر ہی اس کے

س ج متوازی اد کا اور ہ ک متوازی اب کا اور س ج سے نقطہ ف پر ملتا ہوا کھینچو شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب چونکہ ب ک برابر ہی ا ہ کے اور ا ہ برابر ب س کے کاٹا گیا ہی اسلئے ب ک برابر ہی ب س کے

اسلئے ب ک اور ک ف اور ف س اور س ب سب آپسمیں برابر ہیں

اسلئے متوازی الاضلاع ب س ف ک متساوی الاضلاع ہی

اور چونکہ زاویہ ک ب س قائمہ ہی اسلئے س ک مربع ب س پر کا ہی — شرح حد ۳۰ مقالہ

ایسی ہی دلیل سے ہ ج مربع ا س پر کا ہی کیونکہ ہ د اور ہ ف ایں سے ہر ایک برابر ہی ا س کے

اب ا ی برابر ہی ہ ج اور س ک اور ا ف اور ف ی کے مجموعہ کے — علوم متعارفہ مقالہ

لیکن ا ی مربع ہی ا ب پر کا اور ہ ج مربع ا س پر کا اور س ک مربع س ب پر کا

اور ا ف ہی سطح ا س اور س ب کی کیونکہ س ف برابر ہی س ب کے

اور ف ی ہی سطح ا س اور س ب کی کیونکہ ف ج برابر ہی ا س کے اور ف ک برابر س ب کے

اسلئے ا ب پر کا مربع برابر ہی ا س اور س ب پر کے مربعوں معہ دونی سطح ا س اور س ب کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کے ثابت کرنے کا تیسرا طریقہ یہہ ہی

فرض کرو کہ کوئی خط مستقیم ا ب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی — ب س ا

تو ا ب پر کا مربع برابر ہوگا ا س اور س ب کے مربعوں معہ دونی سطح ا س اور س ب کے

چونکہ ا ب پر کا مربع برابر ہی سطح ا ب اور ب س اور سطح ا ب اور ا س کے مجموعہ کے — شکل ۲ مقالہ ۲

لیکن سطح ا ب اور ب س کی برابر ہی ب س پر کے مربع اور سطح ا س اور س ب کے مجموعہ کے

اور سطح ا ب اور ا س کی برابر ہی مربع ا س اور سطح ا س اور س ب کے مجموعہ کے — شکل ۳ مقالہ ۲

اسلئے ا ب پر کا مربع برابر ہی ا س اور س ب پر کے مربعوں معہ دونی سطح ا س اور س ب کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ ا ب طول میں ا پیمانہ ہی اور ا س اور س ب ترتیب وار م اور ن پیمانہ ہیں

تو ا = م + ن

ان دونوں برابر کو مربع کیا

اسلئے ا^{2} = (م + ن)^{2}

اسلئے ا^{2} = م^{2} + ن^{2} + ٢ × م × ن

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم ہو تو کل عدد کا مربع برابر ہی اُن حصوں کے مربعوں سے دونا حاصل ضرب حصوں کے

مشق

ا ب س ایک مثلث ہی جسکا زاویہ ا قائمہ ہی اور ا د ضلع ب س پر عمود ہی ثابت کرو کہ سطح ب د اور د س کی برابر ہی ا د پر کے مربع کے

شکل ۵ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو نابرابر حصوں میں تقسیم کیا جاے تو دونوں نابرابر حصوں کی سطح اور اُس خط پر کا مربع جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان واقع ہی ملکر برابر ہوگا آدھے خط مستقیم پر کے مربع کے

فرض کرو کہ خط مستقیم ا ب نقطہ س پر دو برابر حصوں میں اور نقطہ د پر دو نابرابر حصوں میں تقسیم ہوا ہی

تو سطح ا د اور د ب کی اور س د پر کا مربع ملکر برابر ہوگا س ب پر کے مربع کے

س ب پر مربع س ی ف ب بناؤ (شکل ۴۶ مقالہ ۱) اور ب ی ملاؤ

د سے د ہ ج متوازی س ی یا ب ف کا اور ب ی سے نقطہ ہ پر اور ی ف سے نقطہ ج پر ملتا ہوا کھینچو شکل ۳۱ مقالہ ۱

اور ہ سے ک ل م متوازی س ب یا ی ف کا اور س ی سے نقطہ ل اور ب ف سے نقطہ م پر ملتا ہوا کھینچو

اور اسے ال متوازی س ل یا ب م کا اور م ل ک سے نقطہ ک پر ملتا ہوا کھینچو

اب چونکہ متمم س ہ برابر ہی متمم ہ ف کے — شکل ۴۳ مقالہ ۱

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں د م ملاؤ

اسلئے کل س م برابر ہی کل د ف کے — علوم متعارفہ مقالہ ۱

لیکن چونکہ ا س برابر ہی س ب کے — فرض

اسلئے ا ل برابر ہی س م کے — شکل ۳۶ مقالہ ۱

اسلئے ا ل برابر ہی د ف کے — علوم متعارفہ مقالہ ۱

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں س ہ ملاؤ

اسلئے کل ا ہ برابر ہی د ف اور س ہ کے — علوم متعارفہ مقالہ ۱

لیکن ا ہ ہی سطح اد اور د ب کے کیونکہ د ہ برابر ہی د ب کے

اور د ف اور س ہ ملکر علم س م ج ہی

اسلئے علم س م ج برابر ہی سطح اد اور د ب کے

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں ل ج جو س د پر کا مربع ہی (نتیجہ صریح شکل ۴ مقالہ ۲) ملاؤ

اسلئے علم س م ج اور ل ج ملکر برابر ہیں سطح اد اور د ب مع س د پر کے

مربع کے — علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۱

لیکن علم س م ج اور ل ج ملکر شکل س ی ف ب کو جو س ب پر

کا مربع ہی بناتے ہیں

اسلئے سطح اد اور د ب کی اور س د پر کا مربع ملکر برابر ہی س ب پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

اسی شکل کو اسطرح بھی ثابت کرتے ہیں

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر اور دو نا برابر حصوں میں نقطہ د پر

تقسیم ہوا ہی تو سطح اد اور دب کی اور س د پر کا مربع ملکر برابر ہوگا س ب پر کے مربع کے

س ب پر مربع س ی ف ب بناؤ

شکل ۴۶ م مقالہ ۱

د ج متوازی س ی کا کھینچو (شکل ۳۱ مقالہ ۱)

اور اسمیں سے د ہ برابر د ب کے کاٹو

ہ ل ك متوازی ا د کا اور ا ك متوازی

د ہ کا کھینچو

شکل ۳۱ مقالہ ۱

چونکہ ب ف برابر ہی اس کے اور ب د برابر س ل کے

اسلئے قائم الزاویہ ا ل برابر ہی قائم الزاویہ د ف کے

شکل ۳۶ مقالہ ۱

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں س ہ ملاؤ

اسلئے کل ا ہ برابر ہی س ہ اور د ف کے مجموعہ کے

علوم متعارفہ مقالہ ۱

لیکن ا ہ ہی سطح اد اور د ب کی کیونکہ د ہ برابر ہی د ب کے

اسلئے سطح اد اور د ب کی برابر ہی س ہ اور د ف کے مجموعہ کے

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں ل ج جو س د پر کا مربع ہی ملاؤ

اسلئے سطح اد اور د ب کی اور س د پر کا مربع ملکر برابر ہیں س ہ اور د ف اور ل ج کے مجموعہ کے

لیکن س ہ اور د ف اور ل ج ملکر شکل س ی ف ب کو جو س ب پر کا مربع ہی بناتے ہیں

اسلئے سطح اد اور د ب کی اور س د پر کا مربع ملکر برابر ہیں س ب پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

یہہ شکل تیسرے طریقہ سے اسطرح ثابت ہوتی ہی

فرض کرو کہ ا ب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر اور دو نابرابر حصوں میں نقطہ د پر تقسیم ہوتی ہی تو سطح اد

ا ـــــــــــــ س د ب

اور د ب کی اور س د پر کا مربع ملکر برابر ہیں س ب پر کے مربع کے

س ب اور ب د کی سطح کے

چونکہ سطح س د اور د ب کی اور د ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں

س ب کے

(شکل ۳ مقالہ ۲) اور اس برابر ہے

اس اور ب د کی سطح کے

اسلئے سطح س د اور د ب کی اور د ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں

ان دونوں برابروں سے ہر ایک میں سطح س د اور د ب کی ملادی

سطح اس اور د ب اور

اسلئے س د اور د ب کی سطح کا دونا اور د ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں

سطح س د اور د ب کے مجموعہ کے

لیکن سطح اس اور د ب کی اور سطح س د اور د ب کی ملکر برابر ہیں ا د اور د ب کی سطح کے (شکل ا مقالہ ۲)

اسلئے س د اور د ب کی سطح کا دونا اور د ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں ا د اور د ب کی سطح کے

ان دونو برابروں سے ہر ایک میں س د پر کا مربع ملایا

اسلئے س د اور د ب کی سطح کا دونا اور س د اور د ب پر کے مربعے ملکر برابر ہیں س د پر

کے مربع اور سطح ا د اور د ب کے مجموعہ کے

لیکن س د اور د ب کی سطح کا دونا اور س د اور د ب پر کے مربعے ملکر برابر ہیں س ب پر

(شکل ۴ مقالہ ۲)

کے مربع کے

اسلئے سطح ا د اور د ب کی اور س د پر کا مربع ملکر برابر ہیں س ب پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ اب طول میں ۲ ا پیمانہ ہے اور اسکا ہر ایک آدھا اس یا س ب طول میں ا پیمانہ

ہے اور س د طول میں م پیمانہ ہے

تو اس کے دونا برابر حصے نہیں ہے ہم ا حصہ ا د طول میں (ا + م) پیمانہ ہے اور چھوٹا حصہ

د ب طول میں (ا − م) پیمانہ ہے اور م ہے (ا + م) اور (ا − م) کے فرق کا آدھا

اسلئے $(ا + م)(ا - م) = ا^2 - م^2$

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں $م^2$ ملا دیا

اسلئے $(ا + م)(ا - م) + م^2 = ا^2$

یعنی اگر کوئی عدد دو برابر اور دو نابرابر حصّوں میں تقسیم ہو تو دو نابرابر حصّوں کا حاصل ضرب اور اُن حصّوں کے فرق کے آدھے کا مربع ملکر برابر ہیں اُس عدد کے آدھے کے مربع کے

اس شکل کے پہلے ثبوت کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ سطح اد اور دب کی برابر ہی علم س م ج کے

لیکن علم س م ج شکلوں س ت اور ل ج کا جو اس اور س د بر کے مربعے ہیں فرق ہی اگر اس اور س د جدا جدا خط خیال کئے جائیں تو اد دونوں خط اس اور س د کا مجموعہ ہی اور دب اُن دونوں خطوں کا فرق ہی اور اسلئے یہہ نتیجہ صحیح اس شکل سے ثابت ہی کہ کسی دو خط کے مجموعہ اور اُنکے فرق کی سطح برابر ہی اُن دونوں خطوں کے مربعوں کے فرق کے

اس شکل میں ثابت ہوا ہی کہ سطح اد اور دب کی اور س د بر کا مربع ملکر برابر ہیں اس یا س ب بر کے مربع کے یعنی سطح دو نابرابر حصّوں اد اور دب کی ہر صورت میں چھوٹی ہی اس یا س ب کے مربع سے لیکن اس یا س ب بر کا مربع ہی سطح اس اور س ب کی اسلئے اس سے یہہ نتیجہ ثابت ہوا کہ کسی دیے ہوئے خط مستقیم کے دو حصّوں کی سطح اُس صورت میں انتہا درجہ کی بڑی ہوگی جب تقسیم کا نقطہ اُس خط کے آدھے پر ہی

مشق

۱ مثلث قائم الزاویہ کے اُن دو ضلعوں میں سے جو اُسکے زاویہ قائمہ کو بناتے ہیں کسی ضلع پر کا مربع برابر ہوتا ہی اُس سطح کے جو مثلث کے دوسرے ضلع اور وتر کے مجموعہ اور فرق سے بنتی ہی

۲ ایسی سطح بناؤ جو دو دیے ہوئے مربعوں کے فرق کے برابر ہو

۳ ا ب س مثلث مختلف الاضلاع ہی اور س د عمود ہی اب پر اور نقطہ ی ضلع اب کے بیچوں بیچ کا نقطہ ہی ثابت کرو کہ اس اور س ب پر کے مربعوں کا فرق برابر ہی اُس سطح

کی دونی کے جواب اور دی سے بنتی ہی اور اس نتیجہ سے مثلث کا رقبہ دریافت کرنیکا قاعدہ لکھو
جب اسکے تینوں ضلعوں کی لنبائیاں معلوم ہیں

۴ کسی خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ان حصوں کی سطح برابر دیے ہوئے مربع کے ہو

شکل ۶ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاوے اور کسی نقطہ تک بڑھایا جاوے تو سطح اس کل خط مستقیم بڑھائے ہوے کی اور بڑھے ہوئے حصہ کی اور اس خط مستقیم کے آدھے پر کا مربع جو دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا ہی ملکر برابر ہونگے اس خط مستقیم پر کے مربع کے جو آدھے خط اور بڑھے ہوے حصہ سے بنا ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہی تو سطح اد اور دب کی اور مربع س ب پر کا ملکر برابر ہوگی ام س د پر کے مربع کے

س د پر مربع س ی ت د بناؤ — شکل ۴۶ مقالہ ۱
اور دی ملاؤ

نقطہ ب سے ب ہ ج متوازی س ی یا د ت کا اور دی سے نقطہ ہ پر اور ی ت سے نقطہ ج پر ملتا ہوا کھینچو اور نقطہ ہ سے ک ل ہ م متوازی اد یا ی ت کا اور د ت سے نقطہ م پر اور س ی سے نقطہ ل پر ملتا ہوا کھینچو اور نقطہ ا سے اک متوازی س ل یا د م کا اور م ل سے نقطہ ک پر ملتا ہوا کھینچو — شکل ۳۱ مقالہ ۱

چونکہ اس برابر ہی س ب کے
اسلیے قائم الزاویہ ال برابر ہی قائم الزاویہ س ہ کے — شکل ۳۶ مقالہ ۱
لیکن س ہ برابر ہ ت کے ہی — شکل ۴۳ مقالہ ۱

اسلئے ا ل برابر ہے ہ ف کے

ان دونوں برابروں سے ہر ایک میں س م ملا دیا

اسلئے کل ا م برابر ہی علم س م ج کے — علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۱

لیکن ا م ہی سطح ا د اور د ب کی کیونکہ د م برابر ہی د ب کے — نتیجہ صریح شکل ۴ مقالہ ۲

اسلئے علم س م ج برابر ہی سطح ا د اور د ب کے

ان دونوں برابروں سے ہر ایک میں ل ج جو س ب پر کا مربع ہی ملایا

اسلئے سطح ا د اور د ب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں علم س م ج

اور شکل ل ج کے مجموعہ کے — علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۱

لیکن علم س م ج اور شکل ل ج ملکر شکل س ی ت د جو س د پر کا مربع

ہی بناتے ہیں

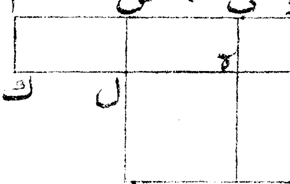
اسلئے سطح ا د اور د ب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں س د پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

چھٹی شکل کا دوسرا ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم ا ب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہی

تو سطح ا د اور د ب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہونگے س د پر کے مربع کے



س د پر مربع س ی ت د بناؤ — شکل ۴۶ مقالہ ۱

ب سے ب ح متوازی س ی کا کھینچو — شکل ۳۱ مقالہ ۱

اور ب ہ برابر ب د کے بناؤ

ہ سے ک ل م متوازی ا د کا کھینچو اور ا سے ا ک متوازی س ی کا کھینچو — شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب چونکہ ب ح برابر ہی س د کے اور ب ہ برابر ب د کے

اسلئے ہ ح برابر ہی س ب کے — علوم متعارفہ ۳ مقالہ ۱

اسلئے قائم الزاویہ م ج برابر ہی قائم الزاویہ س ہ کے

لیکن س ہ برابر ہی ا ل کے کیونکہ س ب برابر ہی ا س کے

اسلئے م ج برابر ہی ا ل کے

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں س م اور ل ج ملایا

اسلئے ا م اور ل ج ملکر برابر ہیں س م اور م ج اور ل ج کے مجموعہ کے

لیکن ا م ہی سطح ا د اور د ب کی کیونکہ د م برابر ہی د ب کے اور ل ج ہی مربع س ب

پر کا اور س م اور م ج اور ل ج ملکر شکل س ی ت د کو جو س د پر کا مربع ہی بناتے ہیں

اسلئے سطح ا د اور د ب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں س د پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

چھٹی شکل کا تیسرا ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ ا ب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہی

تو سطح ا د اور د ب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہونگے س د پر کے مربع کے

س ا کو ن تک بڑھاؤ اور س ن

ن ا س ب د

برابر س د کے بناؤ

چونکہ س ن برابر ہی س د کے اور س ب برابر ہی س ا کے

اسلئے کل ن ب برابر ہی کل د ا کے

اب چونکہ سطح ن ب اور ب د کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں س د پر کے مربع کے

(شکل ۵ مقالہ ۲) اور ا د برابر ن ب کے ثابت ہو چکا ہی

اسلئے سطح ا د اور د ب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں س د پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کہ اب طول میں ۲ ا پیمانہ اور اُسکا آدھا اس یا س ب طول میں ا پیمانہ اور ب د طول میں م پیمانہ ہی

تو ا د طول میں (۲ ا + م) پیمانہ ہی

اسلئے (۲ ا + م) × م = ۲ × ا × م + م^{2}

اِن دونوں برابریں سے ہر ایک میں ا^{2} ملا دیا

اسلئے (۲ ا + م) × م + ا^{2} = ا^{2} + ۲ × ا × م + م^{2}

لیکن ا^{2} + ۲ × ا × م + م^{2} = (ا + م)^{2}

اسلئے (۲ ا + م) × م + ا^{2} = (ا + م)^{2}

یعنی اگر کوئی عدد دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاے اور اگر کوئی دوسرا عدد پہلے کل عدد اور اُسکے ایک حصہ میں ملا دیا جاے تو حاصل ضرب دونوں عددوں کے حاصل جمع اور دوسرے عدد کا اور پہلے عدد کے آدھے کا مربع ملکر برابر ہی اُس عدد کے مربع کے جو پہلے عدد کے آدھے اور دوسرے عدد کے مجموعہ سے بنا ہی

چھٹی شکل کے پہلے ثبوت کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ سطح ا د اور د ب کی برابر ہی علم س م ج کے لیکن علم س م ج شکلوں س ت اور ل ج کا جو اس اور س د کے مربعے ہیں فرق ہی اگر اس اور س د جدا جدا خط خیال کیے جائیں تو ا د دونوں خط اس اور س د کا مجموعہ ہی اور د ب اُن دونوں خطوں کا فرق ہی اور اسلئے یہ نتیجہ صریح ہو جاتا ہی جو پانچویں شکل کی شرح میں لکھ چکے ہیں چھٹی شکل سے بھی ثابت ہی کہ کسی دو خط کے مجموعہ اور اُنکے فرق کی سطح برابر ہی اُن دونوں خطوں کے مربعوں کے فرق کے

پانچویں اور چھٹی شکل کے دعوی ایک ہی دعوی ہیں اسطرح سے بیان ہو سکتے ہیں کہ سطح دو خط مستقیم کی اور اُن خطوں کے فرق کے آدھے پر کا مربع ملکر برابر ہوتے ہیں اُس مربع کے جو اُن خطوں کے مجموعہ کے آدھے پر بنایا جاے

مشق

۱ اب س مثلث متساوی الساقین ہی اور د قاعدہ اب پر یا اوسکے بڑھے ہوئے حصہ پر ایک نقطہ ہی ثابت کرو کہ سطح اد اور د ب کی برابر ہی اس اور س د پر کے مربعوں کے فرق کے

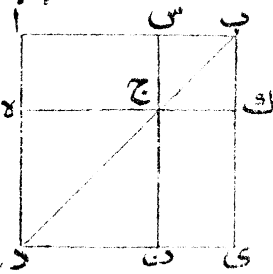
۲ اب اور س د اور ی ف ایسے تین خط مستقیم ہیں کہ اب اور س د کا فرق برابر ہی س د اور ی ف کے فرق کے ثابت کرو کہ سطح اب اور ی ف کی اور اب اور س د کے فرق پر کا مربع ملکر برابر ہیں س د پر کے مربع کے

۳ کسی خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ سطح کل خط بڑھے ہوئے اور اوسکے بڑھے ہوئے حصہ کی برابر ہو دیئے ہوئے مربع کے

شکل ۷ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو کل خط مستقیم اور اوسکے ایک حصہ پر کے مربعے ملکر برابر ہونگے کل خط مستقیم اور اوسی حصہ کی سطح کے دونے اور دوسرے حصہ پر کے مربع کے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب اور ب س پر کے مربعے ملکر برابر ہونگے سطح اب اور ب س کی دونی اور اس پر کے مربع کے



اب پر مربع ا د ی ب بناؤ — شکل ۴۶ مقالہ ۱

اور ب د ملاؤ

س سے س ف متوازی اد یا ب ی کا

اور ب د سے ج پر اور د ی سے ف پر ملتا ہوا کھینچو

اور ج سے ہ ج ک متوازی اب یا د ی کا اور اد سے ہ پر اور ب ی سے ک پر ملتا ہوا کھینچو — شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب چونکہ اج برابر ہی ج ی کے — شکل ۴۳ مقالہ ۱

اور ان دونو برابریں سے ہر ایک میں س ک ملایا

اسلئے کل اک برابر ہی کل س ی کے

اسلئے اک اور س ی ملکر دونے ہیں اک کے

علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۲

لیکن اک اور س ی ملکر علم اک ف اور مربع س ل ہیں

اسلئے علم اک ف اور مربع س ل ملکر دونے ہیں اک کے

لیکن اب اور ب س کی سطح کی دونی بھی دونی ہی اک کی کیونکہ ب اک برابر ہی ب س کے

اسلئے علم اک ف اور مربع س ل ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں ہ ف جو اس پر کا مربع ہی ملایا

اسلئے علم اک ف اور مربع س ل اور ہ ف ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے

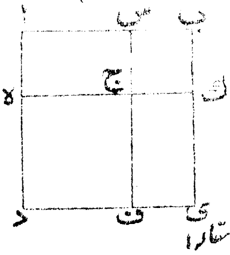
لیکن علم اک ف اور مربع س ل اور ہ ف ملکر شکلوں اد ی ب اور ح ک کو جو اب اور ب س پر کے مربع ہیں بناتے ہیں

اسلئے اب اور ب س پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ساتویں شکل کا دوسرا ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا تو اب اور ب س پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے



اب پر مربع اد ی ب بناؤ — شکل ۴۶ مقالہ ۱

اد میں سے اہ برابر ب س کے کاٹو

س ف متوازی اد کا اور ہ ج ل متوازی اب کا کھینچو — شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب ہ ف ہی مربع اس ب کا اور س ك ہی مربع س ب پر کا

چونکہ اب اور ب س پر کے مربعے برابر ہیں ای اور س ك کے

اور ای اور س ك برابر ہیں اك اور ہ ف اور س ی کے

اسلئے اب اور ب س پر کے مربعے برابر ہیں اك اور س ی اور ہ ف کے

لیکن اك ہی سطح اب اور ب س کی کیونکہ ب ك برابر ہی ب س کے اور س ی ہی سطح اب اور ب س کی کیونکہ ب ی برابر ہی اب کے اور ہ ف مربع اس پر کا ہی

اسلئے اب اور ب س پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ساتویں شکل کا تیسرا ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب اور ب س پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے

ا ——— س ب

چونکہ اب اور ب س کی سطح برابر ہی اس اور ب س کی سطح اور س ب پر کے مربع کے شکل ۳ مقالہ ۲

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا دونا برابر ہی اس اور س ب کی سطح کے دونے اور س ب پر کے مربع کے دونے کے

ان دونوں برابریوں سے ہر ایک میں اس پر کا مربع ملایا

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا دونا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اس اور س ب کی سطح کے دونے اور س ب پر کے مربع کے دونے اور اس پر کے مربع کے

لیکن اس اور س ب کی سطح کا دونا اور س ب اور اس پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اب پر کے مربع کے شکل ۴ مقالہ ۲

اسلئے اب اور س ب پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور

اس بر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبری

فرض کرو کہ اب طول میں ا پیمانہ ہی اور اسکے حصے اس اور س ب طول میں ترتیب وار

م اور ن پیمانہ ہیں

تو ا = م + ن

ان دونوں برابر کا مربع کیا

اسلئے ا^{۲} = م^{۲} + ۲ × م × ن + ن^{۲}

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں ن^{۲} ملایا

اسلئے ا^{۲} + ن^{۲} = م^{۲} + ۲ × م × ن + ۲ × ن^{۲}

لیکن ۲ × م × ن + ۲ × ن^{۲} = ۲ × (م + ن) × ن = ۲ × ا × ن

اسلئے ا^{۲} + ن^{۲} = م^{۲} + ۲ × ا × ن

یعنی اگر کوئی عدد کسی دو حصوں میں تقسیم ہو تو کل عدد اور ایک حصہ کے مربعے ملکر برابر ہیں کل عدد

اور اس حصہ کے حاصل ضرب کے دونے اور دوسرے حصہ کے مربع کے

اگر اب اور ب س دو جدا جدا خط خیال کئے جائیں تو اس خط اب اور ب س کا فرق

ہی اور اسلئے ساتویں شکل کا دعوی اسطرح بھی بیان ہو سکتا ہی کہ دو خطوں کے مربعے ملکر برابر ہیں

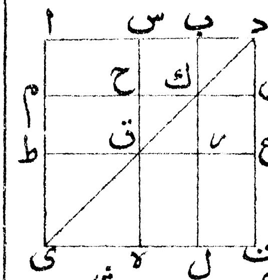
ان خطوں کی سطح کے دونے اور ان خطوں کے فرق کے مربع کے

شکل ۸ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو کل خط اور اسکے کسی ایک

حصہ کی سطح کا چوگنا اور دوسرے حصہ پر کا مربع ملکر برابر ہونگے اس خط مستقیم پر کے مربع

کے جو کل خط اور پہلے حصہ سے بنتا ہی



فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب اور ب س کی سطح کا جوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہونگے اُس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنتا ہی

اب کو اتنا بڑھاؤ کہ ب د برابر ہو س ب کے (شکل ۲ مقالہ ۱)

اد پر مربع ا ی ف د بناؤ (شکل ۴۶ مقالہ ۱) اور د ی ملاؤ

ب اور س سے ب ل اور س ہ متوازی ا ی یا د ف کے اور د ی سے نقطوں ك اور ق پر او ری ف سے نقطوں ل اور ہ پر ملتے ہوئے کھینچو

ك اور ق سے م ج ك ن اور ط ق ر ع متوازی اد یا ی ف کے کھینچو

اب چونکہ س ب برابر ہی ب د کے اور س ب برابر ج ك کے اور ب د برابر ك ن کے

اسلئے ج ك برابر ہی ك ن کے

اور ایسی ہی دلیل سے ق ر برابر ہی ر ع کے

چونکہ س ب برابر ہی ب د کے اور ج ك برابر ك ن کے

اسلئے قائم الزاویہ س ك برابر ہی قائم الزاویہ ب ن کے اور قائم الزاویہ ج ر برابر ر ن کے (شکل ۳۶ مقالہ ۱)

لیکن س ك برابر ہی ر ن کے (شکل ۴۳ مقالہ ۱)

اسلئے ب ن بھی برابر ہی ج ر کے

اسلئے چاروں قائم الزاویہ ب ن اور س ك اور ج ر اور ر ن آپسمیں برابر ہیں اور چاروں ملکر کسی ایک س ك کا چوگنا ہیں

چونکہ س ب برابر ہی ب د اور ب د برابر ب ك کے یعنی برابر س ج کے

اور چونکہ س ب برابر ہی ج ك یعنی برابر ج ق کے

اسلئے س ج برابر ہی ج ق کے

چونکہ س ج برابر ہی ج ق کے اور ق ما برابر سا ع کے

اسلئے قائم الزاویہ ا ج برابر ہی م ق کے اور ق ل برابر سا ف کے شکل ۴ ۱۳ مقالہ

لیکن م ق برابر ہی ق ل کے شکل ۱۳ مقالہ

اسلئے ا ج برابر ہی سا ف کے علوم متعارفہ ا مقالہ

اسلئے چاروں قائم الزاویہ ا ج اور م ق اور ق ل اور سا ف آپسمیں برابر ہیں اور چاروں ملکر کسی ایک ا ج کا چوگنا ہیں

اور یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ چاروں قائم الزاویہ س ك اور ب ن اور ج ما اور سا ن ملکر س ك کا چوگنا ہیں

اسلئے آٹھوں قائم الزاویہ جن سے علم ا ع ہ بنتا ہی ا ك کا چوگنا ہیں

چونکہ ا ك ہی سطح ا ب اور ب س کی کیونکہ ب ك برابر ہی ب ش کے

اسلئے ا ب اور ب س کی سطح کا چوگنا ا ك کا چوگنا ہی

لیکن یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ علم ا ع ہ چوگنا ا ك کا ہی

اسلئے ا ب اور ب س کی سطح کا چوگنا برابر ہی علم ا ع ہ کے علوم متعارفہ ا مقالہ

ان دونوں برابروں سے ہر ایک میں ط ہ جو اس پر کا مربع ہی ملا دیا

اسلئے ا ب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں علم ا ع ہ اور مربع ط ہ کے

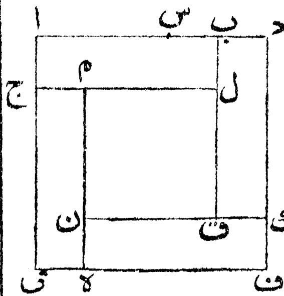
لیکن علم ا ع ہ اور مربع ط ہ ملکر شکل ا ی ف د کو جو اد پر کا مربع ہی بناتے ہیں

اسلئے ا ب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اد پر کے مربع کے یعنی اس خط پر کے مربع کے جو ا ب اور ب س سے بنا ہی

اسلئے اگر کوئی خط الخ یہی ثابت کرنا تھا

آٹھویں شکل کا دوسرا ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اُس خط مستقیم پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنتا ہی



اب کو د تک اتنا بڑھاو کہ ب د برابر ہو ب س کے

اد پر مربع ا ی ف د بناو — شکل ۴۶ مقالہ ۱

ای میں سے اج اور ی ف میں سے ی ہ اور ف د میں سے ف ك برابر ب س کے کاٹو

ج ل متوازی اد کا اور ہ م متوازی ای کا اور ك ن متوازی ی ف کا اور د ق متوازی د ف کا کھینچو — شکل ۳۱ مقالہ ۱

چونکہ اد اور ای اور ی ف اور ف د آپسمیں برابر ہیں اور اج اور ی ہ اور ف ك اور د ب آپسمیں برابر ہیں

اسلئے اب اور ج ی اور ہ ف اور ك د آپسمیں برابر ہیں — علوم متعارفہ ۳ مقالہ ۱

اسلئے قائم الزاویہ ال اور ج ہ اور ہ ك اور ك ب آپسمیں برابر ہیں — شکل ۳۶ مقالہ ۱

اور چاروں ملکر کسی ایک ال کا چوگنا ہیں

لیکن اب اور ب س کی سطح کا چوگنا بھی ال کا چوگنا ہی کیونکہ ب ل برابر ہی ب س کے

اسلئے قائم الزاویہ ال اور ج ہ اور ہ ك اور ك ب ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے چوگنے کے

پھر چونکہ ج ل اور م ہ اور ن ك اور ق ب آپسمیں برابر ہیں کیونکہ ہر ایک برابر ہی اب کے

اور ج م اور ہ ن اور ك ق اور ب ل آپسمیں برابر ہیں کیونکہ ہر ایک برابر ہی ب س کے

اسلئے ل م اور م ن اور ن ق اور ق ل اور اُس آپسمیں برابر ہیں

اسلئے قائم الزاویہ م ق مربع اس پر کا ہی

لیکن یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ قائم الزاویہ ال اوج ہ اور ہ ک اور ک ب ملکر برابر ہیں سطح اب اور ب س کے چوگنے کے

اسلئے پانچوں قائم الزاویہ ال اورج ہ اور ہ ک اور ک ب اور م ق ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے چوگنے کے اور اس پر کے مربع کے

لیکن یہہ پانچوں قائم الزاویہ ملکر شکل ادی ف کو جو اد پر کا مربع ہی بناتے ہیں

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہی اد پر کے مربع کے

یعنی اُس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنا ہی

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

آٹھویں شکل کا تیسرا ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اُس خط مستقیم پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنتا ہی

اب کو د تک اِتنا بڑھاؤ کہ ب د برابر ہو ب س کے ا ــــــ س ــــ ب ــــ د

چونکہ اب اور ب س کی سطح برابر ہی اس اور س ب کی سطح اور س ب پر کے مربع کے

شکل ۳ مقالہ ۲

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگنا برابر ہی اس اور س ب کی سطح کے چوگنے اور س ب پر کے مربع کے چوگنے کے

لیکن اس اور س ب کی سطح کا چوگنا برابر ہی اس اور س د کی سطح کے دونے کے اور س ب پر کے مربع کا چوگنا برابر ہی س د پر کے مربع کے کیونکہ س ب آدھا ہی س د کا

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگنا برابر ہی اس اور س د کی سطح کے دونے اور س د پر کے مربع کے

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں اس پر کا مربع ملا دیا

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اس اور س د کی سطح کے دونے اور اس اور س د پر کے مربعوں کے

لیکن اس اور س د کی سطح کا دونا اور اس اور س د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ا د پر کے مربع کے — شکل ۴ مقالہ ۲

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں ا د پر کے مربع کے

یعنی اُس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنا ہی

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

چوتھا طریقہ آٹھویں شکل کے ثابت کرنیکا یہہ ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اُس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنتا ہی

اب کو د تک اتنا بڑھاؤ کہ ب د برابر ہو ب س کے

د ب س ا

چونکہ اب اور ب د کی سطح کا دونا اور اب اور ب د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ا د پر کے مربع کے — شکل ۴ مقالہ ۲

لیکن ب د برابر ہی ب س کے

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا دونا اور اب اور ب س پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ا د پر کے مربع کے

لیکن اب اور ب س پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے — شکل ۷ مقالہ ۲

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں ا د پر کے مربع کے

یعنی اُس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنا ہی

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ خط اب طول میں ا پیمانہ ہی اور اسکے حصے اس اور س ب طول میں ترتیب وار

م اور ن پیمانہ ہیں

تو م + ن = ا

ان دونوں برابریں سے ن نکالا

اسلئے م = ا - ن

ان دونوں برابر کا مربع کیا

اسلئے م۲ = ا۲ - ۲ × ا × م + ن۲

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں ۴ × ا × م ملایا

اسلئے ۴ × ا × م + م۲ = ا۲ + ۲ × ا × م + ن۲

لیکن ا۲ + ۲ × ا × م + ن۲ = (ا + ن)۲

اسلئے ۴ × ا × م + م۲ = (ا + ن)۲

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم ہو تو کل عدد اور اسکے ایک حصہ کے حاصل ضرب کا چوگنا اور دوسرے حصہ کا مربع ملکر برابر ہیں اس عدد کے مربع کے جو کل عدد اور اسکے پہلے حصہ سے بنا ہی

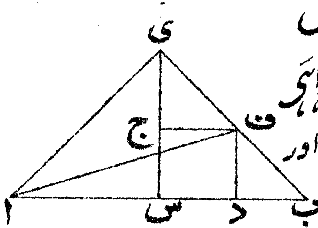
اگر اب اور ب س جدا جدا خط خیال کئے جائیں تو آٹھویں شکل کے دعوی کی یہہ صورت ہوگی کہ دو خط مستقیم کی سطح کا چوگنا اور ان کے فرق پر کا مربع ملکر برابر ہونگے ان خطوں کے مجموعہ پر کے مربع کے

شکل ۹ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو نابرابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو دونوں نابرابر حصوں پر کے مربعے ملکر دونے ہوتے ہیں آدھے خط پر کے مربع اور اس خط پر کے مربع

جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان واقع ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں



نقطہ س پر اور دو نابرابر حصوں میں نقطہ د پر تقسیم ہوا ہی

تو اد اور دب پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور

س د پر کے مربعوں کے

س سے س ی خط اب کے ساتھہ زاویے قائمہ بناتا ہوا کھینچو شکل ۱۱ مقالہ ۱

س ی برابر اس یا س ب کے بناؤ (شکل ۳ مقالہ ۱) اور ی ا اور ی ب ملاؤ

د سے د ف متوازی س ی کا اور ی ب سے ف پر ملتا ہوا کھینچو اور ف سے

ف ج متوازی اب کا کھینچو (شکل ۳۱ مقالہ ۱) اور اف ملاؤ

اب چونکہ اس برابر ہی س ی کے

اسلئے زاویہ ا ی س برابر ہی زاویہ ی اس کے شکل ۵ مقالہ ۱

چونکہ زاویہ اس ی قائمہ ہی

اسلئے زاویے ا ی س اور ی اس ملکر برابر ایک قائمہ کے ہیں شکل ۳۲ مقالہ

اور چونکہ یہہ دونوں زاویے آپسمیں برابر ہیں اسلئے ہر ایک انمیں سے آدھا قائمہ ہی

ایسی ہی دلیل سے زاویوں س ی ب اور ی ب س میں سے ہر ایک

آدھا قائمہ ہی

اور اسلئے کل زاویہ ا ی ب قائمہ ہی

چونکہ زاویہ ج ی ف آدھا قائمہ ہی اور زاویہ ی ج ف قائمہ ہی کیونکہ وہ برابر

ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ی س ب کے شکل ۲۹ مقالہ ۱

اسلئے زاویہ ی ف ج آدھا قائمہ ہی

اسلئے زاویہ ج ی ف برابر ہی زاویہ ی ف ج کے

اسلئے ضلع ج ف برابر ہی ضلع ج ی کے — شکل ۶ مقالہ ۱

پھر چونکہ زاویہ ف ب د آدھا قائمہ ہی اور زاویہ ف د ب قائمہ ہی کیونکہ وہ برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ی س ب کے — شکل ۲۹ مقالہ ۱

اسلئے زاویہ ب ف د آدھا قائمہ ہی

اسلئے زاویہ ف ب د برابر ہی زاویہ ب ف د کے

اسلئے ضلع د ف برابر ہی ضلع د ب کے — شکل ۶ مقالہ ۱

چونکہ ا س برابر ہی س ی کے

اسلئے ا س پر کا مربع برابر ہی س ی پر کے مربع کے

اسلئے ا س اور س ی پر کے مربعے ملکر دونے ہیں ا س پر کے مربع کے — علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۲

لیکن ا ی پر کا مربع برابر ہی ا س اور س ی پر کے مربعوں کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے ا ی پر کا مربع دونا ہی ا س پر کے مربع کا

پھر چونکہ ی ج برابر ہی ج ف کے

اسلئے ی ج پر کا مربع برابر ہی ج ف پر کے مربع کے

اسلئے ی ج اور ج ف پر کے مربعے ملکر دونے ہیں ج ف پر کے مربع کے

لیکن ی ف پر کا مربع برابر ہی ی ج اور ج ف پر کے مربعوں کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے ی ف پر کا مربع دونا ہی ج ف پر کے مربع کا

لیکن ج ف برابر ہی س د کے — شکل ۳۴ مقالہ ۱

اسلئے ی ف پر کا مربع دونا ہی س د پر کے مربع کا

لیکن ا ی پر کا مربع دونا ہی ا س پر کے مربع کا

اسلئے ا ی اور ی ف پر کے مربعے ملکر دونے ہیں ا س اور س د پر کے مربعوں کے

لیکن اف پر کا مربع برابر ہے ای اور ی ف پر کے مربعوں کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے اف پر کا مربع دونا ہے اس اور س د پر کے مربعوں کا

لیکن اد اور دف پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اف پر کے مربع کے

اسلئے اد اور دف پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے

لیکن دف برابر ہے دب کے

اسلئے اد اور دب پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

نویں شکل کا دوسرا ثبوت یہہ ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر اور دو نا برابر حصوں میں نقطہ د پر تقسیم ہوا ہے تو اد اور دب پر کے مربعے ملکر دونے ہونگے اس اور س د پر کے مربعوں کے

ب د س ا

چونکہ اد پر کا مربع برابر ہے اس اور س د کی سطح کے دونے اور اس اور س د پر کے مربعوں کے (شکل ۴ مقالہ ۲) اور ب س اور س د کی سطح کا دونا اور دب پر کا مربع ملکر برابر ہیں ب س اور س د پر کے مربعوں کے — شکل ۷ مقالہ ۲

اسلئے اد اور دب پر کے مربعے اور ب س اور س د کی سطح کا دونا ملکر برابر ہیں اس اور س د کی سطح کے دونے اور س د پر کے مربع کے دونے اور اس اور ب س پر کے مربعوں کے — علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۱

لیکن ب س برابر ہے اس کے

اسلئے اد اور دب پر کے مربعے اور اس اور س د کی سطح کا دونا ملکر برابر ہیں اس اور س د کی سطح کے دونے اور اس اور س د پر کے مربعوں کے دونے کے

ان دونوں برابروں سے اس اور س د کی سطح کا دونا نکال ڈالو

اسلئے اد اور دب پر کے مربعے دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے — علوم متعارفہ ۳ مقالہ ۱

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ خط اب طول میں ۲ا پیمانہ اور اُسکا آدھا اس یا س ب طول میں ا پیمانہ اور خط س د جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان واقع ہی م پیمانہ ہی

تو اد طول میں (ا+م) پیمانہ ہی اور د ب طول میں (ا−م) پیمانہ ہی

اب (ا+م)۲ = ا۲ + ۲×ا×م + م۲

اور (ا−م)۲ = ا۲ − ۲×ا×م + م۲

اسلیئے (ا+م)۲ + (ا−م)۲ = ۲ا۲ + ۲م۲

یعنی اگر کوئی عدد دو برابر حصوں میں اور دو نابرابر حصوں میں تقسیم ہو تو دونو نابرابر حصوں کے مربعے ملکر دونے ہیں آدھے عدد کے مربع اور نابرابر حصوں کے فرق کے آدھے کے مربع سے

نویں شکل میں ثابت ہوا کہ دو نابرابر حصوں اد اور دب پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د کے مربعوں سے یعنی برابر ہیں اس اور س ب پر کے مربعوں اور س د پر کے مربع کے دونے کے اسلیئے دو برابر حصوں اس اور س ب پر کے مربعے ملکر دو نابرابر حصوں اد اور دب پر کے مربعوں سے ہمیشہ چھوٹے ہیں اسلیئے اس شکل سے یہہ نتیجہ صحیح ثابت ہوا کہ کسی خط مستقیم کے دو حصوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اُس صورت میں انتہا درجہ کا چھوٹا ہوگا جب تقسیم کا نقطہ خط مستقیم کے آدھے پر ہی

مشق

۱ مثلث اب س میں خط اد زاویہ ا سے ب س کو نقطہ د پر دو برابر حصوں میں کاٹتا ہوا کھینچا گیا ہی ثابت کرو کہ اب اور اس پر کے مربعے ملکر دونے ہیں ب د اور ا د پر کے مربعوں کے

۲ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع کے چاروں ضلعوں پر کے مربعے ملکر برابر ہونگے اسکے دونوں قطروں پر کے مربعوں کے

۳ کسی نقطہ ا سے کسی قائم الزاویہ ب س د ی کی چاروں زاویوں تک خط اب اور اس

اور اد اور ای کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ اب اور اد پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اس اور ای پر کے مربعوں کے

۴ ذو اربعۃ الاضلاع اب س د کے قطر اس اور ب د کے بیچوں بیچ کے نقطہ ی اور ف ہیں ثابت کرو کہ چاروں ضلعوں پر کے مربعے ملکر برابر ہیں دونوں قطروں پر کے مربعوں کے اور ی ف پر کے مربع کے چوگنے کے

۵ کسی خط مستقیم کو ایسے دو حصّوں میں تقسیم کرو کہ دونوں حصّوں پر کے مربعے ملکر برابر ہوں دیے ہوے مربع کے اور بتاؤ کہ کس صورت میں اس شکل کا حل ہونا ناممکن ہوگا

شکل ۱۰ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصّوں میں تقسیم کیا جاسے اور کسی نقطہ تک بڑھایا جاسے تو کُل خط مستقیم بڑھے ہوے پر کا مربع اور بڑھے ہوے حصّہ پر کا مربع ملکر دونے ہونگے آدھے خط مستقیم پر کے مربع اور اُس خط پر کے مربع کے جو آدھے خط اور بڑھے ہوے حصّہ سے بنتا ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصّوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہی تو اد اور دب پر کے مربعے ملکر دونے ہونگے اس اور س د پر کے مربعوں کے

نقطہ س سے س ی خط اب کے ساتھ زاویے قائمہ بناتا ہوا کھینچو شکل ۱۱ مقالہ ۱

اور س ی برابر اس یا س ب کے بناؤ

اور ا ی اور ی ب ملاؤ

ی سے ی ف متوازی اب کا کھینچو اور د سے د ف متوازی س ی کا

اور ی ف سے نقطہ ف پر ملتا ہوا کھینچو شکل ۳۱ مقالہ ۱

اب چونکہ ی ف دو متوازی خطوں ی س اور ف د پر گرتا ہی

اسلئے زاویے س ی ف اور ی ف د برابر ہیں دو قائموں کے — شکل ۲۹ مقالہ ۱

اسلئے زاویے ب ی ف اور ی ف د دو قائموں سے کم ہیں

اسلئے ی ب اور ف د اگر ب اور د کی طرف بڑھائے جائیں تو ملجائینگی — علم متعارفہ ۱۱ مقالہ ۱

فرض کرو کہ ی ب اور ف د بڑھکر ج پر ملتے ہیں ا ج ملاؤ

اب چونکہ اس برابر ہی س ی کے

اسلئے زاویہ س ی ا برابر ہی ی ا س کے — شکل ۵ مقالہ ۱

اور زاویہ ا س ی قائمہ ہی

اسلئے زاویوں س ی ا اور ی ا س میں سے ہر ایک آدھا قائمہ ہی — شکل ۳۲ مقالہ ۱

ایسی ہی دلیل سے زاویوں س ی ب اور ی ب س میں سے ہر ایک آدھا قائمہ ہی

اسلئے کل زاویہ ا ی ب قائمہ ہی

چونکہ زاویہ ی ب س آدھا قائمہ ہی

اسلئے زاویہ د ب ج بھی آدھا قائمہ ہی — شکل ۱۵ مقالہ ۱

لیکن زاویہ ب د ج قائمہ ہی کیونکہ وہ برابر ہی زاویہ متبادلہ د س ی کے — شکل ۲۹ مقالہ ۱

اسلئے زاویہ د ج ب آدھا قائمہ ہی اور اسلئے برابر ہی زاویہ د ب ج کے

اسلئے ضلع ب د برابر ہی ضلع د ج کے — شکل ۶ مقالہ ۱

پھر چونکہ زاویہ ی ج ف آدھا قائمہ ہی اور زاویہ ی ف ج قائمہ ہی کیونکہ وہ برابر ہی زاویہ ی س د کے — شکل ۳۴ مقالہ ۱

اسلئے زاویہ ف ی ج آدھا قائمہ ہی اور اسلئے برابر ہی زاویہ ی ج ف کے

اسلئے ضلع ج ف برابر ہی ضلع ف ی کے — شکل ۶ مقالہ ۱

چونکہ ی س برابر ہی س ا کے

اسلئے ی س پر کا مربع برابر ہی س ا پر کے مربع کے

اسلئے ی س اور س ا پر کے مربعے ملکر دونے ہیں س ا پر کے مربع کے

لیکن ی ا پر کا مربع برابر ہے ی س اور س ا پر کے مربعوں کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے ی ا پر کا مربع دونا ہے اس پر کے مربع کا

پھر چونکہ ج ف برابر ہے ف ی کے

اسلئے ج ف پر کا مربع برابر ہے ف ی پر کے مربع کے

اسلئے ج ف اور ف ی پر کے مربعے دونے ہیں ف ی پر کے مربع کے

لیکن ی ج پر کا مربع برابر ہے ج ف اور ف ی پر کے مربعوں کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے ی ج پر کا مربع دونا ہے ف ی پر کے مربع کا

لیکن ف ی برابر ہے س د کے — شکل ۳۴ مقالہ ۱

اسلئے ی ج پر کا مربع دونا ہے س د پر کے مربع کا

لیکن یہہ ثابت ہو چکا ہے کہ ی ا پر کا مربع دونا ہے اس پر کے مربع کا

اسلئے ی ا اور ی ج پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے

لیکن اج پر کا مربع برابر ہے ی ا اور ی ج پر کے مربعوں کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے اج پر کا مربع دونا ہے اس اور س د پر کے مربعوں کا

لیکن اد اور دج پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اج پر کے مربع کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے اد اور دج پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے

لیکن دج برابر ہے د ب کے

اسلئے اد اور د ب پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ — یہی ثابت کرنا تھا

دسویں شکل کا دوسرا ثبوت جو ٹھیک ویسا ہی ہے جیسا نویں شکل کا دوسرا ثبوت ہے

فرض کرو کہ خط اب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہے اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے تو اد

اور د ب پر کے مربعے ملکر دونے ہوں گے اس اور س د پر کے مربعوں کے

چونکہ ا د پر کا مربع برابر ہے ا س اور س د   د ب س ا

کی سطح کے دونے اور اس اور س د پر کے مربعوں کے   شکل ۴ مقالہ ۲

اور ب س اور س د کی سطح کا دونا اور د ب پر کا مربع ملکر برابر ہیں ب س اور س د پر کے مربعوں کے شکل ۷ مقالہ ۲

اسلئے ا د اور د ب پر کے مربعے اور ب س اور س د کی سطح کا دونا ملکر برابر ہوا اس اور س د

کی سطح کے دونے اور س د پر کے مربع کے دونے اور اس اور س ب پر کے مربعوں کے   علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۱

لیکن ب س برابر ہے اس کے

اسلئے ا د اور د ب پر کے مربعے اور اس اور س د کی سطح کا دونا ملکر برابر ہیں اس اور س د

کی سطح کے دونے اور اس اور س د پر کے مربعوں کے دونے کے

ان دونوں برابریں سے اس اور س د کی سطح کا دونا نکال ڈالو

اسلئے ا د اور د ب پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے   علوم متعارفہ ۳ مقالہ ۱

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

دسویں شکل کا تیسرا ثبوت یہ ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم ا ب دو برابر حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہے اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے

تو ا د اور د ب پر کے مربعے ملکر دونے ہونگے اس اور س د پر کے مربعوں کے

ب ا کو نقطہ ی تک بڑھاؤ اور ا ی   د ب س ا ی

برابر د ب کے بناؤ

چونکہ د ا اور ا ی پر کے مربعے ملکر دونے ہیں د س اور س ا پر کے مربعوں کے   شکل ۹ مقالہ ۲

اور ا ی برابر ہے د ب کے

اسلئے ا د اور د ب پر کے مربعے ملکر دونے ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اگر اس اور س د جدا جدا خط خیال کئے جائیں تو نویں و دسویں شکل کے دعوی ایک ہی دعوی اس طرح بیان ہوتے ہیں کہ دو خط مستقیم کے مجموعہ او رانکے فرق پر کے مربعے ملکر دونے ہیں ان خطوں پر کے مربعوں کے

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ اب طول میں ۲ ا پیمانہ اور اسکا آدھا اس یا س ب طول میں ا پیمانہ اور ب د طول میں م پیمانہ اسلئے ا د طول میں (۲ ا + م) پیمانہ اور س د طول میں (ا + م) پیمانہ ہے

چونکہ $(۲ ا + م)^۲ = ۴ ا^۲ + ۴ × ا × م + م^۲$

اسلئے $(۲ ا + م)^۲ + م^۲ = ۴ ا^۲ + ۴ × ا × م + ۲ م^۲$

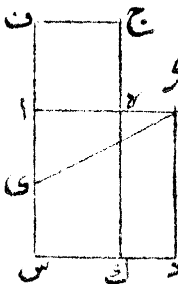
لیکن $۴ ا^۲ + ۴ × ا × م + ۲ م^۲ = ۲ ا^۲ + ۲ ا^۲ + ۴ × ا × م + ۲ م^۲ = ۲ (ا + م)^۲ + ۲ ا^۲$

اسلئے $(۲ ا + م)^۲ + م^۲ = ۲ (ا + م)^۲ + ۲ ا^۲$

اسلئے اگر کوئی دیا ہوا عدد دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے اور کل عدد میں اور اسکے ایک حصہ میں کوئی دوسرا عدد ملایا جائے تو کل عدد بڑھے ہوئے اور دوسرے عدد کے مربعے ملکر دونے ہیں دیے ہوئے عدد کے آدھے اور اس عدد کے مربعوں سے جو دیے ہوئے عدد کے آدھے اور دوسرے عدد سے بنا ہے

شکل ۱۱ عملی

دیے ہوئے خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ کل خط اور اسکے ایک حصہ کی سطح برابر ہو دوسرے حصہ پر کے مربع کے



فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم ہے اسکو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنا ہے کہ کل خط اب اور اسکے ایک حصہ کی سطح برابر ہو دوسرے حصہ پر کے مربع کے

اب پر مربع اس د ب بناؤ — شکل ۴۶ مقالہ ۱

اس کو دو برابر حصوں میں نقطہ ی پر تقسیم کرو — شکل ۱۰ مقالہ ۱

ب ی ملاؤ اور س ا کو ف تک اتنا بڑھاؤ کہ ی ف برابر ہو ی ب کے

اف پر مربع ف ج ہ ا بناؤ — شکل ۴۶ مقالہ ۱

تو اب نقطہ ہ پر ایسا تقسیم ہوا کہ اب اور ب ہ کی سطح برابر ہوگی ا ہ پر کے مربع کے

ج ہ کو بڑھاؤ کہ وہ س د سے ک پر ملے

اب چونکہ اس دو برابر حصوں میں نقطہ ی پر تقسیم ہوا ہی اور نقطہ ف تک بڑھایا گیا ہی
اسلئے س ف اور ف ا کی سطح اور ای کا مربع ملکر برابر ہیں ی ف کے مربع کے — شکل ۶ مقالہ ۲
لیکن ی ف برابر ہی ی ب کے
اسلئے س ف اور ف ا کی سطح اور ای کا مربع ملکر برابر ہیں ی ب کے مربع کے
لیکن ب ا اور ای کے مربع ملکر برابر ہیں ی ب کے مربع کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱
اسلئے س ف اور ف ا کی سطح اور ای کا مربع ملکر برابر ہیں ب ا اور ای کے مربعوں کے
ان دونوں برابریں سے مربع ای کا نکال ڈالو
اسلئے س ف اور ف ا کی سطح برابر ہی اب کے مربع کے — علوم متعارفہ ۳ مقالہ ۱
لیکن شکل ف ك ہی سطح س ف اور ف ا کی کیونکہ ف ا برابر ہی ف ج کے اور اد ہی مربع اب کا
اسلئے ف ك برابر ہی اد کے
حصہ اك کہ جو دونوں میں مشترک ہی نکال ڈالو
اسلئے باقی ف ہ برابر ہی باقی ہ د کے
لیکن ہ د ہی سطح اب اور ب ہ کی کیونکہ اب برابر ہی ب د کے
اور ف ہ ہی مربع ا ہ کا
اسلئے اب اور ب ہ کی سطح برابر ہی ا ہ کے مربع کے
اسلئے خط مستقیم اب نقطہ ہ پر ایسا تقسیم ہوگیا کہ سطح اب اور ب ہ کی برابر ہی
ا ہ کے مربع کے ۔ اسی خط کے اسطور پر تقسیم کرنے کی ضرورت تھی

نتیجہ صریح ۱ اس شکل میں س ف نقطہ ا پر اسی طور پر تقسیم ہوا ہی جیسا اب نقطہ ہ پر تقسیم ہوا ہی

نتیجہ صریح ۲ اگر کوئی خط مستقیم دو نابرابر حصوں میں اسطرح تقسیم ہو کہ سطح کل خط مستقیم اور اُسکے چھوٹے حصہ کی برابر ہو بڑے حصہ کے مربع کے تو بڑا حصہ بھی اسی طور پر تقسیم ہوگا اگر اُسمیں سے چھوٹے کے برابر حصہ کاٹا جاے اور چھوٹا حصہ بھی اسی طور پر تقسیم ہوگا اگر اُس چھوٹے حصہ میں سے دونوں حصوں کے فرق کے برابر حصہ کاٹا جاے

گیارہویں شکل میں اقلیدس نے علم ہندسہ کی رو سے جبر مقابلہ کے دوسرے درجہ کے مساوات کو حل کیا ہی دوسرے درجہ کے مساوات اور اس شکل کا تعلق جتنے اسجگہہ نہیں ثابت کیا ہی کیونکہ طالب علم

جس نے جبر مقابلہ دوسرے درجہ کے مساوات تک نہیں سیکھا ہی آسکو بخوبی نہیں سمجھ سکتا ہی۔

مشق

۱ کسی خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ کل خط مستقیم بڑھے ہوئے اور اسکے بڑھے ہوئے حصہ کی سطح برابر ہو اس خط بیکے مربع کے

۲ گیارھویں شکل میں اگر س ہ بڑھکر ب ت سے نقطہ ل پر ملے تو زاویہ س ل ت قائمہ ہوگا

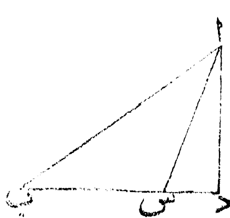
۳ گیارھویں شکل میں اگر ب ی اور س ہ نقطہ ع پر ملیں تو اع ساتھ س ہ کے زاویے قائمہ بناویگا

۴ اگر کوئی خط مستقیم دو حصوں میں اسطرح تقسیم ہو جیساکہ گیارھویں شکل میں تقسیم ہوا ہی تو دونوں حصوں کے مجموعہ اور اُنکے فرق کی سطح برابر ہوگی دونوں حصوں کی سطح کے

شکل ۱۲ اثباتی

اگر مثلث منفرج الزاویہ کے کسی زاویہ حادہ سے اُسکے سامنے کے ضلع بڑھے ہوئے پر عمود ڈالا جاوے تو زاویہ منفرجہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع بڑا ہوگا اُن دو ضلعوں پر کے مربعوں سے جنسے زاویہ منفرجہ بنتا ہی بقدر دونی سطح اُس ضلع جسکے بڑھے ہوئے حصہ پر عمود گرا ہی اور اُس خط مستقیم کے جو درمیان عمود اور زاویہ منفرجہ کے واقع ہی

فرض کرو کہ ا ب س مثلث منفرج الزاویہ ہی جسکا زاویہ ا س ب منفرجہ ہی اور نقطہ ا سے ا د عمود ڈالا گیا ہی ضلع ب س بڑھے ہوئے پر تو ا ب پر کا مربع بڑا ہوگا ا س اور س ب پر کے مربعوں سے بقدر ب س اور س د کی سطح کے دونے کے



چونکہ ب د دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی

اسلئے ب د پر کا مربع برابر ہی ب س اور س د پر کے مربعوں اور دونی سطح ب س اور س د کے شکل ۴ مقالہ ۲

ان دونوں برابروں میں سے ہر ایک میں د ا پر کا مربع ملا یا

اسلئے ب د اور د ا ب کے مربعے ملکر برابر ہیں ب س اور س د اور د ا ب کے
مربعوں اور دونی سطح ب س اور س د کے

لیکن ب ا ب کا مربع برابر ہے ب د اور د ا ب کے مربعوں کے اور س ا ب کا مربع
برابر ہے س د اور د ا ب کے مربعوں کے   شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے ب ا ب کا مربع برابر ہے ب س اور س ا ب کے مربعوں اور دونی سطح ب س
اور س د کے یعنی ب ا ب کا مربع بڑا ہے ب س اور س ا ب کے مربعوں سے بقدر
دونی سطح ب س اور س د کے

اسلئے شکل ۵ منفرج الزاویہ کے الخ ۔ یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ ب س اور س ا اور ا ب طول میں ترتیب وار ا و ب اور س پیمانہ ہیں اور
س د اور د ا طول میں ترتیب وار م اور ن پیمانہ ہیں

تو ب د طول میں (ا + م) پیمانہ ہے

اسلئے $س^{۲} = (ا + م)^{۲} + ن^{۲}$ کیونکہ ا ب د مثلث قائم الزاویہ ہے

اور $ب^{۲} = م^{۲} + ن^{۲}$ کیونکہ ا س د مثلث قائم الزاویہ ہے

اسلئے $س^{۲} - ب^{۲} = (ا + م)^{۲} - م^{۲}$

$= ا^{۲} + ۲ \times ا \times م + م^{۲} - م^{۲}$

$= ا^{۲} + ۲ \times ا \times م$

اسلئے $س^{۲} = ا^{۲} + ب^{۲} + ۲ \times ا \times م$

یعنی س ا بڑا ہے $ا^{۲} + ب^{۲}$ سے بقدر $۲ \times ا \times م$

مشق

۱ مثلث ا ب س کا زاویہ ا س ب منفرج ہے اور زاویہ ا سے ا د عمود ڈالا گیا ہے ب س

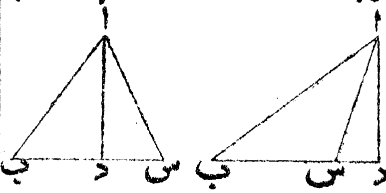
بڑھے ہوئے پر اور زاویہ ب سے ب ی عمود ڈالا گیا ہی ا س بڑھے ہوئے پر ثابت کرو کہ ا س اور س ی کی سطح برابر ہی ب س اور س د کی سطح کے

۲ اب س مثلث متساوی الاضلاع ہی ا سے ا د ایسا خط کھیچا گیا ہی جو ب س بڑھے ہوئے سے ایسے نقطہ د پر ملتا ہے کہ سطح ب د اور د س کی برابر ہی مثلث اب س کے کسی ضلع پر کے مربع کے ثابت کرو کہ ا د پر کا مربع دونا ہی مثلث اب س کے کسی ضلع پر کے مربع کا

شکل ۱۳ اثباتی

کسی مثلث میں کسی زاویہ حادہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع اُن دو ضلعوں پر کے مربعوں سے جتنے وہ زاویہ حادہ بنتا ہی چھوٹا ہوگا بقدر دونی سطح اِن ضلعوں میں سے کسی ضلع اور اُس خط مستقیم کے جو درمیان زاویہ حادہ اور اُس عمود کے جو اُس ضلع پر اُسکے سامنے کے زاویہ سے ڈالا گیا ہی واقع ہی

فرض کرو کہ اب س مثلث ہی اور اُسکا زاویہ ب حادہ ہی اور اُسکے ضلع ب س یا ضلع ب س بڑھے ہوئے پر اُسکے سامنے کے زاویہ ا سے ا د عمود ڈالا گیا ہی تو مربع ضلع ا س پر کا جو زاویہ ب کے سامنے ہی چھوٹا ہوگا س ب اور ب ا پر کے مربعوں سے بقدر دونی سطح س ب اور ب د کے



چونکہ س ب نقطہ د پر اور ب د نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی

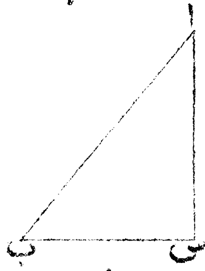
اسلئے س ب اور ب د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں س ب اور ب د کی سطح کے دونے اور د س پر کے مربع کے

شکل ۷ مقالہ ۲

ان دونوں برابریں سے ہر ایک میں ا د پر کا مربع ملاؤ

اسلئے س ب اور ب د اور د ا پر کے مربعے ملکر برابر ہیں س ب اور ب د کی سطح کے دونے اور ا د اور د س پر کے مربعوں کے

لیکن ب ا پر کا مربع برابر ہی ب د اور د ا پر کے مربعوں کے اور اس پر کا
مربع برابر ہی اد اور دس پر کے مربعوں کے　　شکل ۴ مقالہ ۱
اسلئے س ب اور ب ا پر کے مربعے ملکر برابر ہیں س ب اور ب د کی سطح
کے دونے اور اس پر مربع کے یعنی اس پر کا مربع چھوٹا ہی س ب اور ب ا پر کے مربعوں
سے بقدر س ب اور ب د کی سطح کے دونے کے



شکل ۴ مقالہ ۱

اور جبکہ اس عمود ہی ب س پر تو ب س وہ
خط مستقیم ہی جو زاویہ ب اور عمود کے درمیان واقع ہی
اور یہہ بات ظاہر ہی کہ اب اور ب س پر کے مربعے
ملکر برابر ہیں اس پر کے مربع اور دونے مربع ب س پر کے
اسلئے اگر کسی مثلث میں الخ — یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ ب س اور س ا اور اب طول میں ترتیب وار ا اور ب اور س پیمانہ ہیں
ب د اور اد طول میں ترتیب وار م اور ن پیمانہ ہیں
(پہلی صورت دیکھو) اب د س طول میں (ا - م) پیمانہ ہی
چونکہ س۲ = ن۲ + م۲ کیونکہ زاویہ ا د ب قائمہ ہی
اور ب۲ = ن۲ + (ا - م)۲ کیونکہ زاویہ ا د س قائمہ ہی
اسلئے س۲ - ب۲ = م۲ - (ا - م)۲
= م۲ - ا۲ + ۲ × ا × م - م۲
= - ا۲ + ۲ × ا × م
اسلئے ا۲ + س۲ = ب۲ + ۲ × ا × م
یعنی ب۲ چھوٹا ہی ا۲ + س۲ سے بقدر ۲ × ا × م

(دوسری صورت دیکھو) اب د س طول میں (م − ا) پیمانہ ہے

چونکہ $س^2 = م^2 + ن^2$ کیونکہ زاویہ ادب قائمہ ہے

اور $ب^2 = (م - ا)^2 + ن^2$ کیونکہ زاویہ ادس قائمہ ہے

اسلئے $س^2 - ب^2 = م^2 - (م - ا)^2$

$= م^2 - م^2 + ۲ \times ا \times م - ا^2$

$= ۲ \times ا \times م - ا^2$

اسلئے $ا^2 + س^2 = ب^2 + ۲ \times ا \times م$

یعنی $ب^2$ چھوٹا ہے $ا^2 + س^2$ سے بقدر $۲ \times ا \times م$

(تیسری صورت دیکھو) اس صورت میں م برابر ہے ا کے

اور $ب^2 + ا^2 = س^2$

ان دونوں برابریوں سے ہر ایک میں $ا^2$ ملایا

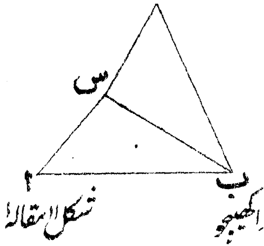
اسلئے $ب^2 + ۲ \times ا^2 = ا^2 + س^2$

یعنی $ب^2$ چھوٹا ہے $ا^2 + س^2$ سے بقدر $۲ \times ا \times ا$

بارہویں اور تیرہویں شکل کے دعوے ایک ہی دعوی میں اسطرح بیان ہوسکتے ہیں کہ مثلث کے ایک ضلع پر کے مربع اور باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کا فرق برابر ہے اُس سطح کے دو چندکے جو ان دو ضلعوں میں سے کسی ضلع اور اُس خط سے بنتی ہے جو درمیان اُس زاویہ کے کہ دونوں شلعے ہیں اور عمود کے جو اُس ضلع پر اُسکے سامنے کے زاویہ سے ڈالا گیا ہے واقع ہے

اس مقالہ کی بارہویں اور تیرہویں شکلیں اور پہلے مقالہ کی سینتالیسویں شکل ترتیب وار مثلث منفرج الزاویہ اور مثلث حادہ الزاویہ اور مثلث قائم الزاویہ کے ضلعوں کے آپسکے علاقے بیان اور ثابت کرتے ہیں پہلے مقالہ کی سینتالیسویں شکل کا عکس اقلیدس نے اُس مقالہ کی اڑتالیسویں شکل میں ثابت کیا ہے لیکن دوسرے مقالہ کی بارہویں اور تیرہویں شکل کے عکس اقلیدس نے نہیں ثابت کیے ہیں وہ یہ ہیں کہ اگر مثلث کے کسی ضلع پر کا مربع اُسکے باقی دو ضلعوں پر کے

مربعوں سے بڑا ہو تو اُس ضلع کے سامنے کا زاویہ منفرجہ ہوگا" اور "اگر مثلث کے کسی ضلع پر کا مربع اُسکے باقی
دو ضلعوں پر کے مربعوں سے چھوٹا ہو تو اُس ضلع کے سامنے کا زاویہ حادہ ہوگا" اِن عکسوں کا ثبوت یہہ ہی



فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہی اگر ا ب پر کا مربع
بڑا ہی ا س اور س ب پر کے مربعوں سے تو زاویہ ا س ب
منفرجہ ہی اور اگر چھوٹا ہی اُنسے تو زاویہ ا س ب حادہ ہی

س سے س د ضلع ب س کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو — شکل ۱۱ مقالہ ۱
اور س د برابر س ا کے بناؤ
چونکہ زاویہ ب س د قائمہ ہی
اسلئے ب س اور س د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ب د پر کے مربع کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱
لیکن ب س اور س د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ب س اور س ا پر کے مربعوں کے کیونکہ س د برابر
س ا کے بنایا گیا ہی
اسلئے ب د پر کا مربع برابر ہی ب س اور س ا پر کے مربعوں کے
اگر ب ا پر کا مربع بڑا ہی ب س اور س ا پر کے مربعوں سے تو وہ ب د پر کے مربع سے بھی
بڑا ہی اور اگر وہ چھوٹا ہی ب س اور س ا پر کے مربعوں سے تو وہ ب د پر کے مربع سے بھی چھوٹا ہی
فرض کرو کہ ب ا پر کا مربع بڑا ہی ب س اور س ا پر کے مربعوں سے
اسلئے ب ا پر کا مربع بڑا ہی ب د پر کے مربع سے
اسلئے ب ا بڑا ہی ب د سے
چونکہ مثلث ا س ب کے دو ضلعے ا س اور س ب الگ الگ برابر ہیں مثلث د س ب
کے دو ضلعوں د س اور س ب کے یعنی ا س برابر ہی د س کے اور س ب دونوں مثلثوں
میں مشترک ہی لیکن مثلث ا س ب کا قاعدہ ا ب بڑا ہی مثلث د س ب کے قاعدہ د ب سے
اسلئے زاویہ ا س ب بڑا ہی زاویہ د س ب سے — شکل ۲۵ مقالہ ۱

لیکن زاویہ د س ب قائمہ ہی

اسلئے زاویہ ا س ب منفرجہ ہی

پھر فرض کرو کہ ب ا پر کا مربع چھوٹا ہی ب س اور س ا پر کے مربعوں سے

اسلئے ب ا پر کا مربع چھوٹا ہی ب د پر کے مربع سے

اسلئے ب ا چھوٹا ہی ب د سے

چونکہ مثلث ا س ب کے دو ضلعے ا س اور س ب الگ الگ برابر ہیں مثلث د س ب کے دو ضلعوں د س اور س ب کی یعنی ا س برابر ہی د س کے اور س ب دونوں مثلثوں میں مشترک ہی لیکن مثلث ا س ب کا قاعدہ ا ب چھوٹا ہی مثلث د س ب کے قاعدہ د ب سے

اسلئے زاویہ ا س ب چھوٹا ہی زاویہ د س ب سے

لیکن زاویہ د س ب قائمہ ہی

اسلئے زاویہ ا س ب حادہ ہی

اسلئے اگر مثلث کے کسی ضلع پر کا مربع الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

مشق

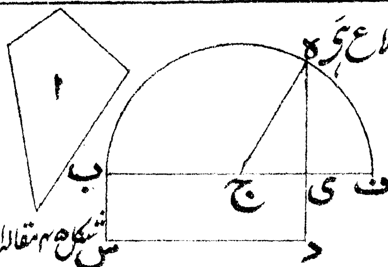
۱ مثلث ا ب س متساوی الساقین میں اسکے قاعدہ ا ب پر کسی زاویہ ا سے اسکے سامنے کے ضلع ب س پر عمود ا د ڈالا گیا ہی ثابت کرو کہ ا ب پر کا مربع دونا ہی س ب اور ب د کی سطح کا

۲ مثلث ا ب س کا زاویہ س قائمہ ہی اس کے کسی نقطہ د سے د ی عمود ا ب پر ڈالا گیا ہی ثابت کرو کہ ا ب اور ا ی کی سطح برابر ہی ا س اور ا د کی سطح کے

۳ ا ب س د شکل ذوزنقہ ہی جسکے ضلع ا ب اور س د متوازی ہیں ثابت کرو کہ د ب ا اور ب د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ا د اور ب س پر کے مربعوں اور دونی سطح ا ب اور س د کے

شکل ۱۴ عملی

دیئے ہوئے مستقیم الاضلاع کے برابر مربع بناؤ



شکل ۴۵ مقالہ ۱

فرض کرو کہ ا دیا ہوا مستقیم الاضلاع ہے
اسکی برابر مربع بنانا ہے
متوازی الاضلاع قائم الزاویہ
ب س د ی برابر ا کے بناؤ

اب اگر اس متوازی الاضلاع کے ضلعے ب ی اور ی د آپسمیں برابر ہیں
تو یہہ مربع ہے اور ہمارا مطلب پورا ہو گیا

اگر ب ی اور ی د برابر نہیں ہیں تو اُنمیں سے ایک ب ی کو ف تک
بڑھاؤ اور ی ف برابر ی د کے بناؤ

ب ف کو دو برابر حصوںمیں نقطہ ج پر تقسیم کرو — شکل ۱۰ مقالہ ۱

ج مرکز سے ج ب یا ج ف دوری پر نصف دائرہ ب ہ ف کھینچو
اور د ی کو بڑھاؤ کہ وہ محیط سے نقطہ ہ پر ملے

تو مربع جو ی ہ پر بنایا جائیگا برابر ہوگا دی ہوئی مستقیم الاضلاع کے

ج ہ ملاؤ

چونکہ ب ف دو برابر حصوںمیں نقطہ ج پر اور دو نابرابر حصوںمیں نقطہ ی پر تقسیم ہوا ہے
اسلئے ب ی اور ی ف کی سطح اور ی ج پر کا مربع ملکر برابر ہے ج ف پر
کے مربع کے — شکل ۵ مقالہ ۲

لیکن ج ف برابر ہے ج ہ کے — حد ۱۵ مقالہ ۱

اسلئے ب ی اور ی ف کی سطح اور ی ج پر کا مربع ملکر برابر ہے ج ہ پر کے
مربع کے

لیکن ہ ی اور ی ج پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ج ہ پر مربع کے — شکل ۴۷ مقالہ ۱

اسلئے ب ی اور ی ف کی سطح اور ی ج پر کا مربع ملکر برابر ہے ہ ی اور

ی ج پر کے مربعوں کے

ی ج پر کا مربع جو ان دونوں میں مشترک ہی نکال ڈالو

اسلئے ب ی اور ی ف کی سطح برابر ہی ہ ی پر کے مربع کے

لیکن ب ی اور ی ف کی سطح ہی متوازی الاضلاع ب د کیونکہ ی ف برابر ہی ی د کے

اسلئے ب د برابر ہی ی ہ پر کے مربع کے

لیکن ب د برابر مستقیم الاضلاع ا کے بنایا گیا ہی

اسلئے ی ہ پر کا مربع برابر ہی مستقیم الاضلاع ا کے

اسلئے دیے ہوے مستقیم الاضلاع کے برابر ایک مربع بنگیا جو ی ہ پر بنایا جائے اور اسی کے بنانے کی ضرورت تھی

نتیجہ صریح اس شکل سے صاف ظاہر ہی کہ اگر کسی دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے اسکے قطر پر عمود ڈالا جائے تو اس عمود پر کا مربع برابر ہوگا قطر کے حصوں کی سطح کے جنھیں وہ عمود سے تقسیم ہوا ہی

مشق

۱ دیے ہوئے مربع کے برابر ایک مستطیل بناؤ جسکا ایک ضلع دیے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہو

دوسرے مقالہ کی شکلوں پر متفرق مشق

۱ دیے ہوئے مثلث کے کسی ضلع کو اتنا بڑھاؤ کہ اس ضلع اور بڑھے ہوئے حصہ کی سطح برابر ہو باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے فرق کے

۲ دیے ہوئے خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ اس خط پر کا مربع اور بڑھے ہوئے حصہ پر کا مربع ملکر دونے ہوں اس سطح کے جو کل خط بڑھے ہوے اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنتی ہی

۳ دیے ہوئے خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ دیے ہوئے خط پر کا مربع اور کل خط بڑھے ہوئے پر کا مربع ملکر دونے ہوں اس سطح کے جو کل خط بڑھے ہوئے اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنتی ہی

۴ دیے ہوئے خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ دیے ہوئے خط پر کا مربع برابر ہو سطح کُل خط مستقیم بڑھے ہوئے اور حصّہ بڑھے ہوئے کے

۵ مثلث کے قاعدہ کے بیچوں بیچ کا نقطہ دیے ہوئے دائرہ کا مرکز ہی اور قاعدہ کے سامنے کا زاویہ محیط کے کسی نقطہ پر ہے ثابت کرو کہ مثلث کے دو ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ ہمیشہ ایک مقدار معینہ مستقل ہوگی

۶ ذواربعۃ الاضلاع کے قطروں پر کے مربعوں کا مجموعہ دونا ہوگا اُن خطوں پر کے مربعوں کا جو ذواربعۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں کو ملاتے ہیں

۷ اُس نقطہ کو جہاں کسی متوازی الاضلاع کے قطر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں مرکز بناکر دائرہ کھینچا جائے ثابت کرو کہ اُن خطوں پر کے مربعوں کا مجموعہ جو دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے متوازی الاضلاع کے چاروں زاویوں تک کھینچے گئے ہیں ہمیشہ ایک مقدار معینہ مستقل ہوگی

۸ کسی دائرہ کے قطر اب میں نقطہ س اور د اُسکے مرکز سے برابر دوری پر لئے جائیں اور محیط کے کسی نقطہ ی سے ی س اور ی د کھینچے جائیں ثابت کرو کہ ی س اور ی د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اس اور اد پر کے مربعوں کے

۹ اگر مثلث اب س کے قاعدہ ب س پر د ایسا نقطہ ہی کہ اب اور ب د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے تو اد کے بیچوں بیچ کا نقطہ ب اور س سے برابر دوری پر ہوگا

۱۰ اگر مثلث متساوی الساقین کے زاویہ راس سے اُسکے قاعدہ کے کسی نقطہ تک خط کھینچا جاوے تو اُس خط پر کا مربع مثلث کی ساق پر کے مربع سے بقدر قاعدہ کے حصّوں کی سطح کے چھوٹا ہوگا

۱۱ – ایسا مثلث متساوی الساقین منفرج الزاویہ بناؤ کہ زاویہ منفرجہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع اُسکی ہر ساق پر کے مربع سے تگنا ہو

۱۲ اُس مثلث کا زاویہ منفرجہ دریافت کرو جبکہ زاویہ منفرجہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع اُن ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ سے جو زاویہ منفرجہ کے گرد ہیں بقدر اُن ضلعوں کی سطح کے چھوٹا ہے

۱۳ مربع کے اندر جو سب سے چھوٹا مربع بنے گا وہ اُس مربع کا آدھا ہوگا

۱۴ ایک خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ کل خط اور اُسکے ایک حصہ پر کے مربعے ملکر دونے ہوں دوسرے حصہ پر کے مربع کے

۱۵ دو متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کی رقبے آپسمیں برابر ہیں اور اُنکے ضلعوں کے مجموعہ بھی آپسمیں برابر ہیں ثابت کرو کہ سب طرح سے آپسمیں برابر ہیں

۱۶ ا ب س د متوازی الاضلاع قائم الزاویہ ہے اور ع ایسا نقطہ ہے کہ ع ا اور ع س کا مجموعہ برابر ہے ع ب اور ع د کے مجموعہ کے ثابت کرو کہ ع کا مقام النقاط وہ دو خط مستقیم ہیں جو متوازی الاضلاع کے مرکز سے اُسکے ضلعوں کے متوازی کھیچے گئے ہیں

۱۷ اگر مثلث کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں سے اُنکے سامنے کے زاویوں تک خط مستقیم کھیچے جائیں تو ان خطوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کا چوگنا برابر ہوگا مثلث کے ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے تگنے کے

۱۸ ا ب س مثلث متساوی الاضلاع ہے اور ا د اور ب ی ضلعوں ب س اور ا س پر عمود ہیں اور ایک دوسرے کو نقطہ ف پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ ا ب پر کا مربع تگنا ہے ا ف پر کے مربع کا

۱۹ ا ب س د ایک متوازی الاضلاع ہے اگر قطر ا س برابر ہو ا ب کے تو قطر ا س پر کا مربع چھوٹا ہوگا قطر ب د پر کے مربع سے بقدر ب س پر کے مربع کے دونے کے

۲۰ ایک خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ سطح کل خط مستقیم بڑھے ہوئے اور کسی دوسرے دیے ہوئے خط مستقیم کی برابر ہو بڑھے ہوئے حصہ پر کے مربع کے نقط

مضمون کے مطابق تحریر اقلیدس کے پہلے اور دوسرے مقالہ کی شکلوں کی فہرست

شکل اثباتی

زاویے جو مستقیم خطوں کے آپسمیں ملنے یا کاٹنے سے بنتے ہیں

نمبر شکل	مقدم	تالی
۱۱ نتیجہ صریح	اگر دو خط ایسے ہیں کہ وہ مستقیم ہیں	اُن کا کوئی حصہ مشترک نہیں ہو سکتا
۱۳	اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر کھڑا ہو کر دو زاویے بنا دے	یہہ زاویے یا تو دو قائمے ہوں گے یا ملکر دو قائموں کے برابر ہوں گے
۱۴	اگر دو خط مستقیم کسی خط مستقیم کی آمنے سامنے کی طرفوں سے آکر اُس سے ایک ہی نقطہ پر ملیں اور زاویے متصلہ برابر دو قائموں کے بنا دیں	یہہ دونوں خط مستقیم ایک ہی خط مستقیم یعنی ایک ہی سیدھ میں ہوں گے
۱۵ نتیجہ صریح ۱	اگر دو خط مستقیم آپسمیں کسی نقطہ پر کاٹیں	چار زاویے جو اُس نقطہ پر بنیں گے ملکر برابر چار قائموں کے ہوں گے
۱۵	اگر دو خط مستقیم آپسمیں کسی نقطہ پر کاٹیں	زاویے متقابلہ آپسمیں برابر ہوں گے
۱۵ عکس	اگر چار خط مستقیم کسی نقطہ پر آپسمیں ملکر زاویے متقابلہ برابر بنا دیں	پہلا خط مستقیم تیسرے خط مستقیم کی سیدھ میں ہوگا اور دوسرا چوتھے کی
۱۳ نتیجہ صریح	اگر کوئی خط مستقیم کسی خط مستقیم کی ایکطرف سے آکر اُسکے کسی نقطہ پر جو اُسکے سرے کا نقطہ نہیں ہے ملیں اور زاویے بنائیں	اُس نقطہ پر کے سب زاویے ملکر دو قائموں کے برابر ہوں گے

نمبر شکل	مقدم	تالی
۱۵ نتیجہ صریح ۲	اگر ایک نقطہ سے کئی خط مستقیم نکلیں	زاویے جو اُن خطوں سے اُس نقطہ پر بنیں گے ملکر برابر چار قائموں کے ہوں گے

متوازی خط مستقیم

نمبر شکل	مقدم	تالی
۲۷	اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر جو ایک ہی سطح میں ہیں گرکر زاویے تبادلہ برابر بناوے	یہہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں گے
۲۸ پہلا حصہ	اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر جو ایک ہی سطح میں ہیں گرکر زاویہ خارجہ اُنکے سامنے کے زاویہ داخلہ کے برابر بناوے	یہہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوگے
۲۸ دوسرا حصہ	اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر جو ایک ہی سطح میں ہیں گرکر اپنی ایک طرف کے دو زاویے داخلہ ایسے بناوے کہ وہ ملکر دو قائموں کے برابر ہوں	یہہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں گے
۲۹ پہلا حصہ	اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے	وہ خط اُنکے ساتھہ زاویے تبادلہ برابر بنائیگا
۲۹ دوسرا حصہ	اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے	وہ اپنی ایک طرف کا زاویہ خارجہ اور اُسکے سامنے کا زاویہ داخلہ ایک دوسرے کے برابر بنائیگا
۲۹ تیسرا حصہ	اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے	وہ اپنی ایک طرف کے دو زاویے داخلہ ایسے بنائیگا کہ وہ ملکر دو قائموں کے برابر ہوں گے
۳۰	اگر دو خط مستقیم میں سے ہر ایک کسی تیسرے خط مستقیم کا متوازی ہے	وہ دونوں خط مستقیم آپسمیں بھی متوازی ہوں گے
۳۳	اگر دو خط مستقیم کسی دو برابر اور متوازی خط مستقیم کے ایک طرف کے سروں کو ملائیں	وہ دونوں خط مستقیم آپسمیں بھی برابر اور متوازی ہوں گے

مثلثوں کو برابری کے لئے مقابلہ کرنا

نمبر شکل	مقدم	تالی
۰	اگر دو مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی طرف میں ہوں	ممکن نہیں کہ ان مثلثوں کے وہ ضلعے جنکے سرے قاعدہ کے ایک سرے پر ہوں آپسمیں برابر ہوں اور وہ ضلعے بھی جنکے سرے قاعدہ کے دوسرے سرے پر ہوں آپسمیں برابر ہوں
۳۲ نتیجہ صریح	اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں	اس مثلث کا تیسرا زاویہ بھی دوسرے مثلث کے تیسرے زاویہ کے برابر ہوگا
۲۶	اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ایک ایک ضلع بھی ان مثلثوں کا برابر ہو خواہ یہہ ضلعے برابر زاویوں کے درمیان کے ہوں یا ان کے سامنے کے ہوں	باقی زاویے اور ضلعے بھی ان مثلثوں کے الگ الگ برابر ہونگے اور مثلث بھی آپسمیں برابر ہوں گے
۸	اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ان کے قاعدے بھی آپسمیں برابر ہوں	قاعدوں کے سامنے کے زاویہ آپسمیں برابر ہونگے اور برابر برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے بھی آپسمیں برابر ہوں گے اور دونو مثلث بھی آپسمیں برابر ہونگے
۲۵	اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں لیکن ایک مثلث کا قاعدہ دوسرے مثلث کے قاعدے سے بڑا ہو	بڑے قاعدہ کے سامنے کا زاویہ چھوٹے قاعدہ کے سامنے کے زاویہ سے بڑا ہوگا
۴	اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ان ضلعوں سے بنے ہوئے زاویہ بھی آپسمیں برابر ہوں	مثلثوں کے قاعدے آپسمیں برابر ہونگے اور قاعدوں پر کے زاویے جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں آپسمیں برابر ہوں گے اور مثلث برابر ہوں گے

نمبر شکل	مقدم	تالی
۲۴	اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں لیکن ایک مثلث کے اُن ضلعوں سے بنا ہوا زاویہ دوسرے مثلث کے ضلعوں سے بنے ہوئے زاویہ سے بڑا ہو	بڑے زاویہ کے سامنے کا قاعدہ چھوٹے زاویہ کے سامنے کے قاعدہ سے بڑا ہوگا
۳۷	اگر مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں	اُن مثلثوں کے رقبے برابر ہوں گے
۳۸	اگر مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں	اُن مثلثوں کے رقبے برابر ہوں گے
۳۹	اگر برابر مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور اُسکے ایک ہی طرف میں ہوں	وہ مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں گے
۴۰	اگر برابر مثلث ایک ہی خط مستقیم کے برابر قاعدوں پر اور اُنکے ایک ہی طرف ہوں	وہ مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں گے
۳۷و۳۸و۳۹ عکس	اگر برابر مثلث ایک ہی متوازی خطوںکے درمیان ہیں	وہ مثلث یا تو ایک ہی قاعدہ یا برابر قاعدوں پر ہونگے

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے آپس کا علاقہ

نمبر شکل	مقدم	تالی
۲۰	اگر دو خط مستقیم کسی مثلث کے دو ضلعے ہیں	وہ دونوں خط ملکر مثلث کے تیسرے ضلع سے بڑے ہونگے
۱۷	اگر دو زاویے کسی مثلث کے دو زاویے ہیں	دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہونگے
۳۲ دوسرا حصہ	اگر تین زاویے کسی مثلث کے تین زاویے داخلہ ہیں	وہ سب زاویے ملکر دو قائموں کے برابر ہوں گے
۳۲ نتیجہ صریح	اگر مثلث کا ایک زاویہ برابر باقی دو زاویوں کے ہے	وہ زاویہ قائمہ ہوگا
ایضاً	اگر مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہے	اُسکے باقی دو زاویے ملکر ایک قائمہ کے برابر ہونگے

نمبر شکل	مقدم	تالی
۳۲ نتیجہ صریح ۵	اگر مثلث کے دو زاویے ملکر اُسکے تیسرے زاویہ سے بڑے ہیں	تیسرا زاویہ حادہ ہی
ایضاً	اگر مثلث کے دو زاویے ملکر اُسکے تیسرے زاویہ سے کم ہیں	تیسرا زاویہ منفرجہ ہی
۶	اگر کسی مثلث کے دو زاویے آپسمیں برابر ہیں	اُن زاویوں کے سامنے کے ضلعے بھی آپسمیں برابر ہوں گے
۱۹	اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ اُسکے دوسرے زاویہ سے بڑا ہی	بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع چھوٹے زاویہ کے سامنے کے ضلع سے بڑا ہوگا
۵	اگر مثلث متساوی الساقین ہی اور اگر برابر ضلعے بڑھائے جائیں	اُسکے قاعدہ پر کے زاویے آپسمیں برابر ہو گے قاعدہ کے نیچے کے زاویے آپسمیں برابر ہو گے
۳۲ نتیجہ صریح ۷	اگر مثلث قائم الزاویہ متساوی الساقین بھی ہی	قاعدہ پر کا ہر ایک زاویہ آدھا قائمہ ہوگا
۱۸	اگر کسی مثلث کا ایک ضلع اُسکے دوسرے ضلع سے بڑا ہی	بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ چھوٹے ضلع کے سامنے کے زاویہ سے بڑا ہوگا
۵ نتیجہ صریح	اگر مثلث متساوی الاضلاع ہی	وہ مثلث متساوی الزوایا بھی ہی
۳۲ نتیجہ صریح ۹	اگر مثلث متساوی الاضلاع ہی	اُسکا ہر ایک زاویہ ایک قائمہ کا دو تہائی ہی
۶ نتیجہ صریح	اگر مثلث متساوی الزوایا ہی	وہ مثلث متساوی الاضلاع بھی ہی
۱۶	اگر مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے	زاویہ خارجہ اپنے سامنے کے ہر ایک زاویہ داخلہ سے بڑا ہوگا
۳۲ پہلا حصہ	اگر مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے	زاویہ خارجہ اپنے سامنے کے دونوں زاویہ داخلہ کے برابر ہوگا

نمبر شکل	مقدم	تالی
۴۷	اگر مثلث قائم الزاویہ ہی	مربع جو زاویہ قائمہ کے سامنے کے ضلع پر بنایا جائیگا برابر ہوگا اُن مربعوں کے جو باقی دو ضلعوں پر بنائے جائیں گے
۴۸	اگر مثلث کے ایک ضلع پر بنایا ہوا مربع برابر ہی اُن مربعوں کے جو باقی دو ضلعوں پر بنائے گئے ہیں	اُس ضلع کے سامنے کا زاویہ قائمہ ہی
۱۲ مقالہ ۲ عکس	اگر مثلث کے کسی ضلع پر بنایا ہوا مربع بڑا ہی باقی دو ضلعوں پر بنائے ہوے مربعوں کے مجموعہ سے	اُس ضلع کے سامنے کا زاویہ منفرجہ ہی
۱۳ مقالہ ۲ عکس	اگر مثلث کے کسی ضلع پر بنایا مربع چھوٹا ہی باقی دو ضلعوں پر بنائے ہوے مربعوں کے مجموعہ سے	اُس ضلع کے سامنے کا زاویہ حادہ ہی
خط مستقیم جو مثلث کے اندر کھیچے جائیں		
۳۸ نتیجہ صریح	اگر مثلث کے کسی ضلع کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے اُس ضلع کے سامنے کے زاویہ تک خط کھیچا جائے	وہ خط مثلث کے دو برابر حصے کریگا
۲۱	اگر مثلث کے قاعدہ کے سروں سے دو خط مستقیم کسی نقطہ تک جو مثلث کے اندر ہی کھیچے جائیں	یہہ دونوں خط ملکر مثلث کے باقی ضلعوں سے چھوٹے ہونگے لیکن اِن خطوں سے بنا ہوا زاویہ اُس زاویہ سے بڑا ہوگا جو اُن ضلعوں سے بنا ہی
۱۳ مقالہ ۲	اگر مثلث کے اُن ضلعوں میں سے جو زاویہ منفرجہ کے گرد ہیں کسی ضلع بڑھے ہوئے پر اُسکے سامنے کے زاویہ سے عمود گرایا جائے	زاویہ منفرجہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع بڑا ہوگا باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ سے بقدر اُس سطح کے دونے کے جو اُس ضلع سے جسپر عمود گرایا گیا ہی اور اُسکے اُس بڑھے ہوئے حصہ سے جو درمیان زاویہ منفرجہ اور عمود کے واقع ہوتی ہی

نمبر شکل	مقدمہ	تالی
۱۳ مقالہ ۲	اگر مثلث کے اُن ضلعوں میں سے جو زاویہ حادہ کے گرد ہیں کسی ضلع پر یا اُس ضلع پر بڑھے ہوئے پر اُسکے سامنے کے زاویہ سے عمود گرایا جائے	اُس زاویہ حادہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع چھوٹا ہوگا باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ سے بقدر اُس سطح کے دونے کے جو اُس ضلع سے جسپر عمود گرایا گیا ہی اور اُس خط سے جو اُس زاویہ حادہ اور عمود کے درمیان واقع ہی بنتی ہی

متوازی الاضلاع اور مثلث کا مقابلہ

نمبر شکل	مقدمہ	تالی
۴۱	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں	متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہوگی
۴۱ نتیجہ صریح	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں	متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہوگی
۴۱ عکس ۱	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر ایک ہی خط مستقیم کے برابر قاعدوں پر ہوں اور متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہو	متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں گے
۴۱ عکس ۲	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں اور متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہو	متوازی الاضلاع اور مثلث یا تو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر قاعدوں پر ہوں گے

متوازی الاضلاعوں کو برابری کے لئے مقابلہ کرنا

نمبر شکل	مقدمہ	تالی
۳۵	اگر متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں	وہ متوازی الاضلاع آپس میں برابر ہوگی
۳۵	اگر برابر متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی طرف میں ہوں	وہ متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوگی

تالی	مقدم	نمبر شکل
وہ متوازی الاضلاع آپسمیں برابر ہونگی	اگر متوازی الاضلاع برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں	٣٦
وہ متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیاں ہونگی	اگر برابر متوازی الاضلاع ایک ہی خط مستقیم کے برابر قاعدوں پر ایک ہی طرف میں ہوں	٣٦ عکس
وہ متوازی الاضلاع یا تو ایک ہی قاعدہ یا برابر قاعدوں پر ہونگی	اگر برابر متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیاں ہوں	٣٥ و ٣٦ عکس

متوازی الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں اور سطحوں کے آپس کا علاقہ

تالی	مقدم	نمبر شکل
وہ ذوارلعبۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوگی	اگر کسی ذوارلعبۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعے برابر ہوں	٣٤ عکس
وہ ذوارلعبۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوگی	اگر کسی ذوارلعبۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے زاویے برابر ہوں	٣٤ عکس
تو وہ ذوارلعبۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوگی	اگر کسی ذوارلعبۃ الاضلاع کا ہر ایک قطر اُسکی سطح کے دو برابر حصے کرے	٣٤ عکس
اُسکے آمنے سامنے کے ضلعے آپسمیں برابر ہونگے اور اُسکے آمنے سامنے کے زاویے آپسمیں برابر ہونگے اور اُسکا ہر قطر اُسکی سطح کے دو برابر حصے کریگا	اگر کوئی شکل متوازی الاضلاع ہو	٣٤
اُسکے سب زاویے قائمے ہونگے	اگر متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہو	٤٦ نتیجہ
اُنکے متمم برابر ہونگے	اگر کسی متوازی الاضلاع کے قطر کے گرد جو اور متوازی الاضلاع ہیں	٤٣

قائم الزاویوں کا مقابلہ جو خطوط مستقیم اور اُنکے حصّوں سے بنتے ہیں

نمبر شکل	مقدم	تالی
۲ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو حصّوں میں تقسیم ہوا ہی	سطحیں اُس کل خط مستقیم اور اُسکے ہر ایک حصّہ کی ملکر برابر ہیں کل خط مستقیم پر کے مربع کے
۳ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو حصّوں میں تقسیم ہوا ہی	سطح کل خط مستقیم اور اُسکے ایک حصّہ کی برابر ہی اُس حصّہ پر کے مربع کے اور دونوں حصّہ کی سطح کے
۴ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو حصّوں میں تقسیم ہوا ہی	کل خط مستقیم پر کا مربع برابر ہی دونوں حصّوں پر کے مربعوں کے اور اُن حصّوں کی سطح کے دونے کے مجموعہ کے
۷ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو حصّوں میں تقسیم ہوا ہی	کل خط مستقیم اور اُسکے ایک حصّہ کے پر مربع ملکر برابر ہیں کل خط اور اُس حصّہ کی سطح کے دونے اور دوسرے حصّہ پر کے مربع کے
۸ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو حصّوں میں تقسیم ہوا ہی	کل خط مستقیم اور اُسکے ایک حصّہ کی سطح کا چوگنا اور دوسرے حصّہ پر کا مربع ملکر برابر ہیں اُس خط پر کے مربع کے جو خط مستقیم اور پہلے حصّہ سے بنتا ہی
۵ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو نا برابر حصّوں میں تقسیم ہوا ہی	سطح دو نا برابر حصّوں کی اور اُس خط پر کا مربع جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان واقع ہی ملکر برابر ہیں خط مستقیم کے آدھے پر کے مربع کے
۹ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو نا برابر حصّوں میں تقسیم ہوا ہی	دو نا برابر حصّوں پر کے مربعے ملکر دونے ہیں خط مستقیم کے آدھے اور اُس خط پر کے مربعوں سے جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان ہی

نمبر شکل	مقدم	تالی
۹ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا ہی اور کسی نقطہ تک بڑھایا گیا ہی	کل خط مستقیم بڑھے ہوئے اور بڑھے ہوئے حصہ کی سطح اور خط مستقیم کے آدھے کا مربع ملکر برابر ہیں اُس خط پر کے مربع کے جو خط مستقیم کے آدھے اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنتا ہی
۱۰ مقالہ ۲	اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا ہی اور کسی نقطہ تک بڑھایا گیا ہی	کل خط مستقیم بڑھے ہوئے پر اور بڑھے ہوئے حصہ پر کے مربعے ملکر دونے ہیں خط مستقیم کے آدھے پر اور اُس خط پر کے مربعوں سے جو آدھے خط اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنتا ہے۔
۱ مقالہ ۲	اگر دو خط مستقیم میں سے ایک کئی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہی	دو خط مستقیم کی سطح برابر ہی اُن سب سطحوں کے مجموعہ کے جو کل خط غیر منقسم اور ہر ایک حصہ خط منقسم سے بنتی ہیں

کثیر الاضلاع

نمبر شکل	مقدم	تالی
۳۲ نتیجہ پہلا	اگر کوئی شکل مستقیم الاضلاع ہی	اُسکے سب زاویے داخلہ اور چار قائمے ملکر اُتنے قائموں کے برابر ہوں گے جو گنتی میں اُسکے ضلعوں کی تعداد سے دونے ہوں گے
۳۲ نتیجہ دوسرا	اگر کسی مستقیم الاضلاع کے سب ضلعے ایک دوسرے کے بعد ایک ہی سمت میں بڑھائے جائیں	سب زاویے خارجہ جو ضلعوں کے بڑھانے سے بنیں گے ملکر چار قائموں کے برابر ہوں گے

شکل عملی

خط مستقیم

نمبر شکل	معلوم	مطلوب
۲	ایک محدود خط مستقیم اور ایک نقطہ	اُس نقطہ سے اُس خط کے برابر ایک خط کھینچنا
۳۱	ایک خط مستقیم اور ایک نقطہ	اُس نقطہ سے اُس خط مستقیم کا متوازی ایک خط مستقیم کھینچنا
۳	دو چھوٹے بڑے خط مستقیم	بڑے خط مستقیم سے چھوٹے کے برابر ایک حصہ کاٹنا
۱۰	ایک خط مستقیم	اُس خط مستقیم کے دو برابر حصے کرنا
۱۱ مقالہ ۲	ایک خط مستقیم	اُس خط مستقیم کے ایسے دو حصے کرنا کہ سطح کل خط مستقیم اور ایک حصہ کے برابر ہو دوسرے حصہ کے مربع کے

زاویہ مسطح مستقیم الخطین

نمبر شکل	معلوم	مطلوب
۲۳	ایک زاویہ مسطحہ مستقیم الخطین اور ایک خط مستقیم اور اسمیں ایک نقطہ	اُس خط کے اُس نقطہ پر اُس زاویہ کے برابر ایک زاویہ بنانا
۹	ایک زاویہ مسطحہ مستقیم الخطین	اُس زاویہ کے دو برابر حصے کرنا
۱۱	ایک خط مستقیم اور اسمیں ایک نقطہ	اُس نقطہ سے ایک ایسا خط کھینچنا کہ وہ اُس خط کے ساتھ زاویے قائمے بناوے
۱۲	ایک غیر محدود خط مستقیم اور اُسکے باہر ایک نقطہ	اُس نقطہ سے اُس خط پر ایک عمود ڈالنا

مثلث

نمبر شکل	معلوم	مطلوب
۲۲	تین خط مستقیم جنمیں سے ہر ایک دو ملکر تیسرے سے بڑے ہیں	ایسا مثلث بنانا کہ اُسکے ضلعے اُن خطوں کے الگ الگ برابر ہوں

نمبر شکل	معلوم	مطلوب
۱	ایک محدود خط مستقیم	اُس پر مثلث متساوی الاضلاع بنانا
	متوازی الاضلاع	
۴۲	ایک مثلث اور ایک زاویہ مسطحہ مستقیم الخطین	مثلث کے برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بنانی کہ اُسکا ایک زاویہ اُس زاویہ کے برابر ہو
۴۴	ایک خط مستقیم اور ایک مثلث اور ایک زاویہ مسطحہ مستقیم الخطین	اُس خط پر مثلث کے برابر ایسی متوازی الاضلاع بنانی جسکا ایک زاویہ اُس زاویہ کے برابر ہو
۴۵	ایک مستقیم الاضلاع اور ایک زاویہ مسطحہ مستقیم الخطین	اُس مستقیم الاضلاع کی برابر ایسی متوازی الاضلاع بنانی کہ اُسکا ایک زاویہ اُس زاویہ کے برابر ہو
۴۵ نتیجہ صریح	ایک خط مستقیم اور ایک مستقیم الاضلاع اور ایک زاویہ مسطحہ الخطین	اُس خط پر اُس مستقیم الاضلاع کی برابر ایسی متوازی الاضلاع بنانی کہ اُسکا ایک زاویہ اُس زاویہ کے برابر ہو
۴۶	ایک محدود خط مستقیم	اُس خط پر مربع بنانا
۱۴ مقالہ ۲	ایک شکل مستقیم الاضلاع	اُس کے برابر ایک مربع بنانا

اطلاع ضروری

چونکہ اضلاع ممالک مغربی و شمالی و اودھ و نیز پنجاب میں اجتک کوئی ارتھمیٹک یعنی حساب کی کتاب ایسی دیکھنے میں نہیں آئی کہ جس سے مڈل کلاس و رنیکیولر او ر انگلو ورنیکیولر و پٹواری گری و قانونگوئی کے امیدوار دنکو امتحان میں کافی مدد دے ۔ جو نسخے اس علم کے مروج ہیں اُنسے نہ تو منشاء گورنمنٹ کا نکلتا ہے اور نہ روزمرہ کی کارروائی میں کافی مدد ملتی ہے ۔ مروجہ نسخوں میں اکثر ایک ایک قاعدہ کی بہت سی مثالیں بھر کر ضخامت بڑھا دیگئی ہے جسکے سبب سے قیمت زیادہ ہوگئی ہے لیکن روزمرہ کی کارآمد باتیں جو اس ملک کے چلن کے متعلق ہیں اُنمیں بہت کم پائی جاتی ہیں قاعدوں کی ترتیب بھی عمدہ طور پر نہیں ہے ۔ پس حسب الارشاد احبابوں کے جو مفاد ملک پر مبنی ہے میں یہہ چاہتا ہوں کہ ایک نسخہ آسان اور مختصر اس قسم کا اپنے ہموطنوں کے روبرو پیش کروں جسمیں ترتیب قاعدوں کی عمدہ ہو اور روزمرہ کی کارروائی کے متعلق بہت سی باتیں آجائیں اور اس علم کے متعلق ایسے چٹکلے درج ہوں جنسے حساب کے سوال بہت جلد حل ہوسکیں اور قیمت بھی اُس نسخہ کی بمقابلہ اور نسخوں کے بہت کم ہو ۔ چنانچہ اُسکا لکھنا شروع کردیا ہے اور اُسکا پہلا حصہ ڈیڑہ مہینے یعنی اپریل کے شروع میں چھپکر تیار ہوجاویگا جن صاحبوں کو اُسکی خریداری منظور ہو مجھکو اطلاع دیں تاکہ تیار ہوتے ہی اُنکی خدمتمیں بھیجدیا جاوے فقط

آتما رام

ہیڈ ماسٹر گورنمنٹ ہائی اسکول متھرا